ARY QUINTELLA

MATEMÁTICA

quarta série ginasial

COMPANHIA EDITORA NACIONAL

Livro de uso autorizado pelo Ministério da Educação e Cultura. Registrado na Comissão Nacional do Livro Didático sob n.º 566.

Exemplar Nº 17856

1966

Impresso nos Estados Unidos do Brasil
Printed in the United States of Brazil

ARY QUINTELLA
Professor catedrático do Colégio Militar

MATEMÁTICA

para a

QUARTA SÉRIE GINASIAL

(Com 723 Exercícios)

58.ª edição

Revista e ampliada, incluindo questões propostas nos exames de admissão ao Curso Normal, Escola Preparatória de Cadetes do Exército, Escola Preparatória de Cadetes da Aeronáutica e Colégio Naval.

COMPANHIA EDITORA NACIONAL
SÃO PAULO

DO AUTOR

Curso Ginasial

1. *Matemática* — primeiro volume
2. *Matemática* — segundo volume
3. *Matemática* — terceira série.
4. *Matemática* — quarta série.

Curso Colegial:

5. *Matemática* — primeiro ano.
6. *Matemática* — segundo ano.
7. *Matemática* — terceiro ano.

Curso Comercial Básico (esgotados):

8. *Aritmética prática* — primeiro ano.
9. *Matemática* — segundo ano.
10. *Álgebra Elementar* — terceiro ano.
11. *Matemática* — quarto ano.

Curso de Admissão:

(Em colaboração com o Prof. Newton O'Reilly).

12. *Exercícios de Aritmética* (esgotado)
13. *Matemática* — Curso de Admissão

Artigo 91:

14. *Guia de Matemática*, para os exames do Artigo 91.

Curso Normal:

(Em colaboração com os Profs. Francisco Junqueira e Dacorso Netto)

15. *Exercícios de Matemática.*

DIVERSOS:

16. *Matemática.* Questões de Concurso nas Escolas Superiores.

★

EDIÇÕES DA
COMPANHIA EDITORA NACIONAL
Rua dos Gusmões, 639 – São Paulo 2, SP

ÍNDICE GERAL

Unidade II

GEOMETRIA

Unidade III

GEOMETRIA

ÍNDICE DOS EXERCÍCIOS

UNIDADE I

ÁLGEBRA

I. Cálculo de radicais.

II. Equações do segundo grau.

III. Trinômio do segundo grau; inequações do segundo grau.

IV. Problemas do segundo grau.

V. Equações redutíveis ao segundo grau.

I. Cálculo de radicais

1. Grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Se desejarmos medir um segmento CD com a unidade AB (fig. 1), três casos podem ocorrer.

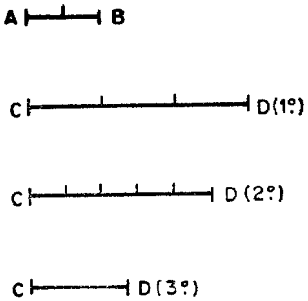


FIG. 1

PRIMEIRO CASO. CD contém exatamente a unidade AB. A medida de CD é, então, um *número inteiro*. No exemplo, 3.

SEGUNDO CASO. CD não contém AB exatamente; porém, se dividirmos AB em duas partes iguais, verificaremos que uma dessas partes cabe exatamente cinco vêzes em CD. A medida de CD é então o *número fracionário* $\frac{5}{2}$ ou $2\,\frac{1}{2}$.

Nesses dois primeiros casos, dizemos que os segmentos AB e CD admitem *uma medida comum* ou são ***comensuráveis.***

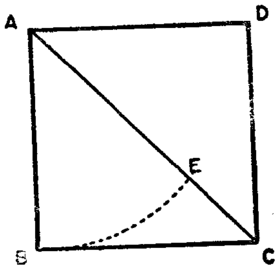


FIG. 2

TERCEIRO CASO. Pode acontecer que CD não contenha AB e, por maior que seja o número de partes em que dividamos AB, nenhuma dessas partes fique contida exatamente em CD. É o que ocorre, por exemplo, com a diagonal e o lado do quadrado (fig. 2). A diagonal não contém o lado e nenhuma de suas partes alíquotas.

Neste caso diz-se que AB e CD não admitem *medida comum* ou são *incomensuráveis*.

Outro exemplo de grandezas incomensuráveis nos é dado pela circunferência e o diâmetro.

2. Números racionais e irracionais. Os números que representam a medida de grandezas comensuráveis com a unidade denomina-se ***números racionais.***

Os números inteiros e fracionários constituem o conjunto dos *números racionais.* Assim, podemos definir como racional o número que pode ser escrito com a forma de fração, $\frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros e q, diferente de zero. Em particular, o número racional é inteiro se p fôr múltiplo de q.

Quando a grandeza é incomensurável com a unidade, sua medida não pode ser expressa por um número inteiro nem fracionário. Torna-se, então necessária a criação de novos números. A tais números dá-se o nome de ***números irracionais.***

Número irracional é, pois, o número que não pode ser escrito com a forma de fração, $\frac{p}{q}$.

Exemplo: Se aplicarmos o processo de extração da raiz quadrada ao número 2, nunca poderemos obter um número inteiro ou fracionário, cujo quadrado seja exatamente 2. Obteremos apenas números, cujos quadrados se aproximam indefinidamente de 2, por valores superiores ou inferiores, conforme considerarmos as raízes por falta ou por excesso.

Assim, efetuando a operação, formaremos as duas sucessões de números decimais:

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ 1{,}4 \\ 1{,}41 \\ 1{,}414 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\} < \sqrt{2} < \left\{\begin{matrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 1{,}42 \\ 1{,}415 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right.$$

Na primeira sucessão os números crescem, porém seus quadrados são todos menores que 2. Na segunda sucessão, os números decrescem, porém seus quadrados são todos maiores que 2. As duas sucessões podem prolongar-se de modo que a diferença entre dois correspondentes, como 1,414 e 1,415, seja tão pequena quanto se queira; entre as duas sucessões, ***separando-as,*** está o número irracional $\sqrt{2}$.

As duas sucessões definem a raiz quadrada de 2, número que não tem representação decimal exata e que também não é uma dízima periódica.

A expressão da raiz quadrada de um número que não é quadrado perfeito representa, sempre, um *número irracional.*

Cálculo de radicais. É claro que podemos operar com os números irracionais substituindo-os por valores aproximados; cometeremos, no entanto, sempre um êrro, embora possa ser muito pequeno, se considerarmos um número de algarismos decimais suficientemente grande.

3. Raiz m-ésima. *Sendo* m *um número inteiro e positivo, denomina-se raiz de índice* m *de* A *o número ou expressão que, elevado à potência* m *reproduz* A.

Êste número é representado pelo símbolo

$$\sqrt[m]{A}$$

O sinal $\sqrt{}$ denomina-se *radical,* o número A, *radicando* e o número m, índice ou grau da raiz ou do radical. Assim:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ porque } 3^3 = 27$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ porque } 2^3 = 8$$

De modo geral temos, por definição:

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^m = A$$

A raiz de índice 1 é o próprio número; assim, $\sqrt[1]{A} = A$.

4. Radical. Chama-se ***radical*** a raiz indicada de um número ou expressão, como $\sqrt[3]{9}$.

Neste caso, o sinal $\sqrt{}$ diz-se ***sinal de radical.***

A raiz pode ser um número racional como, por exemplo, a raiz quarta de 16, que é 2.

Quando não existe um número que elevado ao índice, dê o radicando, a raiz é *irracional*, e, neste caso, é representada pelo *radical.* Assim, a raiz quadrada de 21 escreve-se $\sqrt{21}$.

5. Raízes dos números relativos. Sinais. Se considerarmos os números relativos, em virtude da regra dos sinais das potências, concluiremos:

1.°) A raiz de ***índice par*** de um ***número positivo*** tem dois valores simétricos; isto porque as potências de grau par são sempre positivas. Assim:

$$\sqrt{16} = +4 \text{ porque } (+4)^2 = +16$$

$$\sqrt{16} = -4 \text{ porque } (-4)^2 = +16$$

O duplo valor da raiz é indicado escrevendo-se:

$$\sqrt{16} = \pm 4$$

2.°) A raiz de ***índice par*** de um ***número negativo*** não existe; realmente.

$\sqrt{-4}$ não é $+2$ nem -2, pois $(+2)^2 = +4$ e $(-2)^2 = +4$.

3.°) Tôda raiz de ***índice ímpar*** de um número tem um ***único valor,*** do ***mesmo sinal do número,*** porque as potências de grau ímpar dos números positivos são positivas, e as dos números negativos são negativas.

Exemplos: $\sqrt[3]{+8} = +2$ porque $(+2)^3 = +8$
$\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

A raiz dos números relativos chama-se também, valor *algébrico da raiz.*

6. Valor aritmético de um radical. Chama-se *valor aritmético* de um radical a ***raiz positiva*** de ***radicando positivo.***

Assim o valor aritmético de $\sqrt{64}$ é 8 e $\sqrt[3]{-27}$ não tem valor aritmético.

7. Radicais semelhantes. Expressões conjugadas. Radicais como $2\sqrt{3}$ e $-5\sqrt{3}$, que têm o *mesmo índice* e o mesmo *radicando*, dizem-se ***semelhantres.***

Os radicais semelhantes diferem apenas pelo fator racional que se denomina ***coeficiente.*** No primeiro radical o coeficiente é 2 e no segundo, -5.

Duas expressões irracionais como $2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$ ou $3\sqrt{5}+2$ e $3\sqrt{5}-2$ dizem-se ***conjugadas.***

Observação. As propriedades a serem estudadas só se aplicam aos valores aritméticos dos radicais, podendo ser falsas para os demais.

8. Propriedades dos radicais aritméticos.

Primeira propriedade:

> **Quando multiplicamos ou dividimos o índice do radical, e o expoente do radicando pelo mesmo número, o valor aritmético do radical não se altera.**

Consideremos o radical $\sqrt[5]{7}$.

Elevando-o à potência 2×5 obteremos, de acôrdo com os princípios sôbre potências:

$$(\sqrt[5]{7})^{10} = [(\sqrt[5]{7})^5]^2 = 7^2$$

Assim, $\sqrt[5]{7}$, elevado à potência 2×5 dá para resultado 7^2; logo temos, por definição:

$$\sqrt[5]{7} = \sqrt[5\times2]{7^2}$$

Segunda propriedade:

> **O radical de um produto é igual ao produto dos radicais do mesmo índice dos fatôres.**

Demonstração. Em virtude dos princípios de potenciação, temos:

$$(\sqrt{5} \times \sqrt{7})^2 = (\sqrt{5})^2 \times (\sqrt{7})^2 = 5 \times 7$$

Assim, a expressão $\sqrt{5} \times \sqrt{7}$, elevada ao quadrado dá como resultado 5×7; logo é, por definição, a raiz quadrada de 5×7. Isto é:

$$\sqrt{5 \times 7} = \sqrt{5} \times \sqrt{7}$$

Aplicações:

I) ***Redução de radicais ao mesmo índice.*** Sejam os radicais $\sqrt[4]{2}$ e $\sqrt[6]{3}$. O menor múltiplo comum dos índices é 12, isto é:
$$12 = 4 \times 3 \quad \text{e} \quad 12 = 6 \times 2$$

Os dois radicais poderão ser reduzidos ao mesmo índice 12. Realmente, de acôrdo com o primeiro princípio, temos:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{2} = \sqrt[4\times 3]{2^3} \\ \sqrt[6]{3} = \sqrt[6\times 2]{3^2} \end{cases} \text{donde concluímos:} \begin{cases} \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{8} \\ \sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{9} \end{cases}$$

O cálculo é inteiramente análogo ao da redução de frações ao mesmo denominador, observando-se a regra:

> **Acha-se o m.m.c. dos índices e multiplicam-se o índice e o expoente de cada radical, pelo quociente da divisão do m.m.c. encontrado pelo índice correspondente.**

Exemplo. Sejam os radicais $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[3]{2}$.

O m.m.c. dos índices é 12. Temos:

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$
$$\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}$$
$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

A redução de radicais permite compará-los. Assim, depois de reduzidos ao mesmo índice, será maior o que tiver maior radicando.

No exemplo considerado, temos:

$$\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{2} > \sqrt[6]{3}$$

II) ***Simplificação de radicais.*** Simplificar um radical é obter um radical equivalente, onde o índice e radicando sejam números menores.

Há três casos em que um radical pode ser simplificado.

Primeiro caso: ***O índice e o expoente do radicando têm um divisor comum.***

Neste caso aplica-se imediatamente o primeiro princípio em relação à divisão.

Exemplos:
$$\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$$
$$\sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$$

Segundo caso: ***Um dos fatôres do radicando tem expoente divisível pelo índice.*** Seja o radical $\sqrt{2^4 \times 3}$

De acôrdo com a segunda propriedade, temos:

$$\sqrt{2^4 \times 3} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{3} = 2^2 \times \sqrt{3}$$

Conclui-se:

> **Pode-se tirar um fator do radical, dividindo o expoente pelo índice.**

Exemplos: $\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 5^2} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$

TERCEIRO CASO: ***Um dos fatôres têm expoente maior que o índice.***

Pode-se, neste caso, simplificar, decompondo em fatôres a potência do fator considerado, de modo que um dos fatôres tenha expoente múltiplo do índice.

Exemplos: $\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^2 \times 2^3} = 2\sqrt[3]{2^2}$

$\sqrt{54} = \sqrt{2 \times 3^3} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 3} = 3\sqrt{6}$

OBSERVAÇÃO. Verificamos a igualdade:

$$\sqrt{2^4 \times 3} = 2^2 \times \sqrt{3}$$

E, portanto, podemos concluir: $2^2 \times \sqrt{3} = \sqrt{2^4 \times 3}$, isto é:

Pode-se introduzir um fator no radical elevando-o a uma potência de expoente igual ao índice.

Exemplos:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$$

$$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \times 2} = \sqrt[3]{54}$$

9. **Adição e subtração de radicais.** Essas operações só podem ser efetuadas quando os radicais são semelhantes.

Exemplo:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (3 + 5 - 2)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

Observa-se que as operações são efetuadas entre os coeficientes, conservando-se índice e radicando.

Em certos casos, os radicais tornam-se semelhantes depois de simplificados.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$$

Nos demais casos as operações de adição e subtração ficam indicadas, como, por exemplo:

$$5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt{3}$$

10. **Multiplicação de radicais.** Há dois casos a considerar.

PRIMEIRO CASO: ***Os fatôres têm o mesmo índice.*** Seja calcular o produto

$$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$$

A quarta potência dêste produto será:

$$(\sqrt[4]{5})^4 \times (\sqrt[4]{7})^4 = 5 \times 7$$

Podemos, pois, concluir, de acôrdo com a definição de raiz:

$$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{5 \times 7}$$

Daí a regra:

Para multiplicar radicais do mesmo índice, multiplicam-se os radicandos e dá-se ao produto o índice comum.

Exemplos: $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10}$

$2\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{6}$

SEGUNDO CASO: ***Os fatôres têm índices diferentes.*** Neste caso, reduzem-se os fatôres ao mesmo índice, o que é sempre possível, e aplica-se a regra do caso anterior.

Exemplo: $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{3} = \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{108}$

OBSERVAÇÃO. A multiplicação de um número racional por um radical reduz-se a introduzir o fator racional no radical.

Exemplo: $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$

11. Divisão de radicais.

Primeiro caso: ***Divisão de radicais do mesmo índice.***

> **Dividem-se os radicandos e dá-se ao quociente o índice comum.**

Dizemos que: $$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$$

Realmente: $$\sqrt[3]{\frac{5}{2}} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{5}{2} \times 2} = \sqrt[3]{5}$$

Exemplos: $$\sqrt[4]{30} : \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{5}$$
$$\sqrt{6} : \sqrt{3} = \sqrt{2}$$

Segundo caso: ***Divisão de radicais de índices diferentes.*** Neste caso, reduzem-se os radicais ao mesmo índice e aplica-se a regra do caso anterior.

Exemplos: $$\sqrt{12} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{1\,728} : \sqrt[6]{36} = \sqrt[6]{48}$$
$$\sqrt{2} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2}$$

12. Potenciação de radicais.

Por definição de potência, podemos escrever:

$$(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2} = \sqrt[5]{2^3}$$

Daí, a regra:

> **Para elevar um radical a uma potência, eleva-se o radicando a essa potência e conserva-se o índice.**

Observação. Se o índice do radical e o expoente da potência tiverem um fator comum, pode-se simplificar prèviamente a operação.

Exemplo: $$(\sqrt[4]{2})^6 = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{8}$$

13. Radiciação de radicais.

Seja calcular a raiz quarta do radical: $\sqrt[3]{5}$.

Dizemos que $$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[12]{5}$$

Realmente, elevando os dois membros à quarta potência, obteremos: $$\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5}$$

Conclui-se a regra:

> **Multiplicam-se os índices e conserva-se o radicando.**

Exemplo: $$\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$$

Aplicação. Considerando a recíproca:

$$\sqrt[6]{5} = \sqrt[3]{\sqrt{5}}$$

podemos, em certos casos, obter uma raiz de grau elevado, decompondo o índice em fatôres.

Exemplo:

$$\sqrt[12]{4\,096} = \sqrt[3\times2\times2]{4\,096} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{4\,096}}} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

14. Expoentes fracionários.

Consideremos o radical

$$\sqrt[4]{2^8}$$

De acôrdo com as regras de cálculo de radicais, temos:

$$\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2$$

Com o fim de generalizar a noção de expoente, convenciona-se aplicar esta regra, ainda no caso da divisão não ser exata. Introduzem-se assim os expoentes *fracionários*, como, por exemplo: $\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$

O símbolo $a^{\frac{p}{q}}$, onde p e q são números inteiros positivos é definido pela igualdade:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

isto é:

O expoente fracionário indica uma raiz, cujo índice é o denominador da fração, e cujo radicando é a base elevada à potência de grau igual ao numerador da fração.

Exemplos: $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

$$16^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$$

Introduzidos os expoentes fracionários, resulta a possibilidade de efetuar os cálculos sôbre radicais pela simples consideração dêsses expoentes.

Exemplo:

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2^{11}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{11}{12}} = 2^{\frac{4+9+11}{12}} = 2^2 = 4$$

15. Frações irracionais. Racionalização dos denominadores. Quando o denominador é irracional, é útil transformar a fração numa eqüivalente de denominador racional. Essa transformação denomina-se *racionalização do denominador.*

A racionalização é obtida, multiplicando-se ambos os têrmos da fração por uma expressão convenientemente escolhida e denominada *fator racionalizante.*

Primeiro caso. ***O denominador é um radical do 2.° grau.*** Multiplicaremos os dois têrmos da fração pelo denominador.

Exemplos:

1.°) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2.°) $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

Segundo caso. ***O denominador é um radical de qualquer grau.*** Multiplicaremos os dois têrmos da fração pela potência do denominador que tornar o expoente do radicando igual ao índice.

Exemplos:

1.°) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$

2.°) $\frac{2}{\sqrt[4]{8}} = \frac{2}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{2\sqrt[4]{2}}{2} = \sqrt[4]{2}$

Terceiro caso. ***Denominador binômio em que um só têrmo, ou ambos, são radicais do 2.° grau.***

Multiplicaremos os dois têrmos da fração pela expressão conjugada do denominador, baseando-nos no princípio: "o produto da soma pela diferença de duas quantidades é igual à diferença entre seus quadrados".

Exemplos:

1.°) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})} =$

$$= \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{7 - 2} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2}}{5}$$

2.°) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(2 + \sqrt{5})}{4 - 5} =$

$$= \frac{6 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 5}{-1} = -11 - 5\sqrt{5}$$

EXERCÍCIOS

Dizer quais dos seguintes números são irracionais:

1. $\sqrt{64}$ 2. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ 3. $\sqrt{71}$ 4. $\sqrt[4]{625}$ 5. $\sqrt[3]{100}$

Simplificar os radicais:

6. $\sqrt[6]{27}$ 7. $\sqrt{108}$ 8. $2\sqrt[3]{54}$ 9. $\sqrt{1\,250}$

10. $\sqrt{72}$ 11. $\sqrt[3]{56}$ 12. $\sqrt{2^5 \times 3^7 \times 5^4}$ 13. $\sqrt[4]{59\,049}$

14. $\sqrt[4]{9}$ 15. $\sqrt{200}$ 16. $\sqrt{192}$ 17. $\sqrt[12]{64}$

Passar o coeficiente para o interior do radical:

18. $5\sqrt{3}$ 19. $7\sqrt{2}$ 20. $3\sqrt{21}$ 21. $4\sqrt{5}$

22. $2\sqrt[4]{2}$ 23. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ 24. $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}$ 25. $2\sqrt[3]{7}$

Reduzir ao menor índice comum:

26. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ 27. $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[10]{8}$, $\sqrt{2}$

28. 2, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ 29. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{5^3}$, $\sqrt[3]{3^5}$

Escrever em ordem crescente:

30. $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[10]{8}$, $\sqrt{2}$ *Resp.:* $\sqrt[10]{8} < \sqrt[5]{4} < \sqrt{2}$

31. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{7}$ *Resp.:* $\sqrt[4]{7} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$

32. $\sqrt[3]{12}$ e $\sqrt{6}$ *Resp.:* $\sqrt[3]{12} < \sqrt{6}$

Escrever em ordem decrescente:

33. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$ 34. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$

Calcular e simplificar:

35. $5\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ *Resp.:* $\frac{7}{6}\sqrt{2}$

36. $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{5}$ *Resp.:* $4\sqrt{5}$

37. $\sqrt{50} + \sqrt{32} + \sqrt{18}$ *Resp.:* $12\sqrt{2}$

38. $2\sqrt{45} + 3\sqrt{125} - 6\sqrt{20} + 8\sqrt{80} - 2\sqrt{5}$ *Resp.:* $19\sqrt{5}$

39. $\sqrt{150} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{216}$ *Resp.:* $\frac{34}{3}\sqrt{6}$

40. $\sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{2}$ *Resp.:* 0

41. $\sqrt{108} + \sqrt{75} - 12\sqrt{48}$ *Resp.:* $-37\sqrt{3}$

42. $\sqrt{6} \times \sqrt{24}$ *Resp.:* 12 43. $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$ *Resp.:* $3\sqrt{2}$

44. $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$ *Resp.:* $5\sqrt{3}$ 45. $\sqrt{11} \times \sqrt{22}$ *Resp.:* $11\sqrt{2}$

46. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$ *Resp.:* 3 47. $3\sqrt{2} \times 4\sqrt[3]{3}$ *Resp.:* $12\sqrt[6]{72}$

48. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{8})$ *Resp.:* $7 + 3\sqrt{6}$

49. $(2\sqrt{3} + 3)(3\sqrt{3} - 4)$ *Resp.:* $6 + \sqrt{3}$

50. $(5 + \sqrt{6})(5 - \sqrt{6})$ *Resp.:* 19

51. $(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3})$ *Resp.:* 2

52. $\sqrt{3 - \sqrt{2}} \times \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ *Resp.:* $\sqrt{7}$

53. $\sqrt{96} : \sqrt{6}$ *Resp.:* 4 54. $\sqrt{60} : \sqrt{5}$ *Resp.:* $2\sqrt{3}$

55. $\sqrt{\frac{5}{3}} : \sqrt{15}$ *Resp.:* $\frac{1}{3}$ 56. $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} : \sqrt{\frac{5}{3}}$ *Resp.:* $\sqrt[6]{\frac{3}{20}}$

57. $(3\sqrt[6]{4} - \sqrt[3]{54}) : \sqrt{8}$ *Resp.:* 0

58. $(3\sqrt[3]{3} - \sqrt[6]{9}) : \sqrt[3]{24}$ *Resp.:* 1

59. $(3\sqrt{32} + 2\sqrt{2} - \sqrt[4]{4}) : \sqrt{8}$ *Resp.:* 6,5

60. $\dfrac{\sqrt{40} : \sqrt[4]{4}}{\sqrt{45} - \sqrt[3]{5\sqrt{5}}}$ *Resp.:* 1

61. $\dfrac{3 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} + \dfrac{3\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$ *Resp.:* $\dfrac{3 - \sqrt{2}}{6}$

Racionalizar os denominadores:

62. $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ *Resp.:* $\sqrt{3}$ 64. $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ *Resp.:* $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

63. $\dfrac{5}{\sqrt[4]{2}}$ *Resp.:* $\dfrac{5\sqrt[4]{8}}{2}$ 65. $\dfrac{2}{3 - \sqrt{2}}$ *Resp.:* $\dfrac{6 + 2\sqrt{2}}{7}$

Efetue e simplifique:

66. $\dfrac{3\sqrt{\dfrac{1}{3}}}{\sqrt{3}+4\sqrt{\dfrac{1}{3}}}$ *Resp.*: $\dfrac{3}{7}$

67. $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1}{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}}$ *Resp.*: $2+\sqrt{3}$

68. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$ *Resp.*: $3\sqrt{5}+6$

69. $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ *Resp.*: $\dfrac{7+2\sqrt{6}}{5}$

70. $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \times \dfrac{4}{3+2\sqrt{3}}$ *Resp.*: 4

71. $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}+2}$ *Resp.*: $5-\sqrt{5}$

72. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} : \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ *Resp.*: $2+\sqrt{3}$

73. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{3}} : \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$ *Resp.*: 1

74. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$ *Resp.*: $\sqrt{5}$

Efetuar as operações:

75. $\left(\dfrac{1}{36}\right)^{\frac{1}{2}}$ *Resp.*: $\dfrac{1}{6}$.

76. $16^{\frac{3}{4}}$ *Resp.*: 8

77. $\left(-8\right)^{-\frac{2}{3}}$ *Resp.*: $\dfrac{1}{4}$

78. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)$ *Resp.*: 27

79. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{2^{-1}}} \times \left(\dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{3}}}\right) : \dfrac{3^{-\frac{1}{3}}}{2^{-\frac{1}{2}}}$ *Resp.*: $\sqrt{3}$

80. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ *Resp.*: $\dfrac{9}{4}$

II. Equações do segundo grau

1. Definições. Equação do segundo grau com uma incógnita é a equação racional inteira, cujo maior expoente da incógnita é 2. O tipo geral da equação com uma incógnita é

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde x é a incógnita e a, b, c os coeficientes.

Em primeiro lugar observemos que o coeficiente a não pode ser nulo, pois neste caso a equação se reduziria à do primeiro grau

$$bx + c = 0.$$

Por outro lado, quando o coeficiente a é negativo, podemos multiplicar os dois membros da equação por -1; por esta razão, consideraremos *sempre positivo o coeficiente de* x^2, salvo indicação expressa em contrário.

Os coeficientes b e c podem ser positivos, negativos ou nulos. Quando êsses coeficientes são nulos resultam os tipos particulares das equações denominadas *incompletas:*

1.º) $c = 0$. A equação incompleta é $ax^2 + bx = 0$.

2.º) $b = 0$. A equação incompleta é $ax^2 + c = 0$.

3.º) $b = c = 0$. A equação incompleta é $ax^2 = 0$.

2. Resolução das equações incompletas.

a) Equação $ax^2 + bx = 0$.

Colocando o fator x em evidência, obtemos:

$$x\,(ax + b) = 0.$$

Para que um produto seja nulo, basta que um dos fatôres seja; logo, a equação será satisfeita se tivermos:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad ax + b = 0.$$

A segunda condição ocorre, quando $x = -\dfrac{b}{a}\cdot$ Assim, a equação admite as duas raízes:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = -\frac{b}{a}\cdot$$

Conclui-se:

> **Tôda equação incompleta da forma $ax^2+bx=0$ tem uma raiz nula e outra igual a $-\dfrac{b}{a}$**

Exemplos:

1.º) $5x^2 - 75x = 0$.

Temos: $x(5x - 75) = 0$

donde concluímos: $x = 0$ ou $5x - 75 = 0$.

Representando as raízes por x_1 e x_2, resulta:

$$x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{75}{5} = 15.$$

2.º) $\dfrac{5x+3}{3} - \dfrac{x^2-14}{7} = 3.$

Eliminando os denominadores, temos:

$$35x + 21 - 3x^2 + 42 = 63$$

ou, reduzindo os têrmos semelhantes:

$$3x^2 - 35x = 0;$$

donde concluímos: $x_1 = 0$ e $x_2 = \dfrac{35}{3}\cdot$

b) Equação $ax^2 + c = 0$.

Transpondo c obtemos: $ax^2 = -c$,

ou, dividindo por a: $x^2 = -\dfrac{c}{a}\cdot$

Extraindo a raiz quadrada, resultam dois valores de x:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

> **A equação terá duas raízes simétricas se c fôr negativo, e não terá raízes se c fôr positivo.**

Exemplo: $9x^2 - 16 = 0$.

Temos: $9x^2 = 16$

$$x^2 = \frac{16}{9}$$

donde $x = \pm\dfrac{4}{3}\cdot$

As duas raízes são: $x_1 = \dfrac{4}{3}$ e $x_2 = -\dfrac{4}{3}\cdot$

c) Equação $ax^2 = 0$.

Neste caso a equação tem as duas raízes nulas, pois a é diferente de zero.

3. Resolução da equação completa $ax^2 + bx + c = 0$. A resolução consiste em transformar a equação numa eqüivalente, cujo primeiro membro seja um quadrado, como $(x-5)^2 = 36$, por exemplo; e, em seguida, extrair a raiz quadrada de ambos os membros, o que conduz a duas equações do primeiro grau:

$$x - 5 = \pm 6.$$

Resolvendo a primeira, $x - 5 = 6$, resulta: $x = 11$ e resolvendo a segunda, $x - 5 = -6$, resulta: $x = -1$.

Assim, as raízes são: $x_1 = 11$ e $x_2 = -1$.

Exemplos:

1.º) **Seja a equação $x^2 - 6x = 7$;**

Para completar o quadrado do primeiro membro, adicionemos 3^2 ou 9 aos dois membros e resulta o quadrado de $x - 3$, pois o têrmo $- 6x$ é o duplo produto de x por 3. Assim:

$$x^2 - 6x + 9 = 16$$

ou

$$(x - 3)^2 = 16$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros, obtemos as duas equações do primeiro grau

$$x - 3 = 4 \quad \text{donde } x_1 = 7$$

e

$$x - 3 = -4 \quad \text{donde } x_2 = -1.$$

2.º) $3x^2 + 8x + 4 = 0.$

Como o coeficiente 3 não é quadrado, multiplicando os dois membros por 3 e, transpondo o terceiro têrmo, resultará a eqüivalente

$$9x^2 + 24x = -12.$$

ou

$$(3x)^2 + 2 \,.\, 3x \,.\, 4 = -12.$$

Para completar o quadrado do primeiro membro, adicionemos 4^2 ou 16 aos dois membros:

$$9x^2 + 24x + 16 = 16 - 12$$

ou

$$(3x + 4)^2 = 4$$

donde concluímos: $3x + 4 = \pm 2.$

As duas equações do primeiro grau são:

$$3x + 4 = 2 \quad \text{donde } x_1 = -\frac{2}{3}$$

e

$$3x + 4 = -2 \quad \text{donde } x_2 = -2\,.$$

Fórmula. De modo análogo ao dos exemplos anteriores podemos proceder com a equação geral

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Transpondo c para o segundo membro:

$$ax^2 + bx = -c.$$

Como a é diferente de zero, podemos multiplicar os dois membros por $4a$. Resulta:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Para completar o quadrado do primeiro membro, adicionemos b^2 a ambos os membros:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

ou,

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, resulta:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Resolvendo as equações do primeiro grau, concluímos:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

donde:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Em lugar de resolver as equações numéricas completando o quadrado, podemos utilizar a última expressão, substituindo em cada caso as letras a, b e c pelos números que figuram na equação dada. Tal expressão é pois a ***fórmula geral*** de resolução das equações do segundo grau.

Exemplos:

1.º) ***Resolver a equação***

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Exemplo: *Resolver a equação*

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Temos: $p = -5$ e $q = 6$. Aplicando a fórmula simplificada, resulta:

$$x = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 6} = 2{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = 2{,}5 \pm 0{,}5.$$

As raízes são: $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$.

Observemos que qualquer equação do 2.º grau pode ser escrita com a forma *p, q;* basta dividi-la pelo coeficiente do primeiro têrmo. Assim, a equação

$$4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

toma a forma $x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = 0,$

sendo $p = \frac{5}{4}$ e $q = \frac{1}{4}$.

2.º) *Quando o coeficiente de x é um número par.*

Se b é um número par podemos escrever $b = 2k$, e, aplicando a fórmula, obteremos:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a}$$

ou, simplificando o radical:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a}$$

Dividindo os dois têrmos da fração por 2 resulta a fórmula

$$\boxed{x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}}$$

Exemplo: *Resolver*

$$5x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Temos: $a = 5$, $k = -3$ e $c = 1$.

Aplicando a fórmula simplificada, obtemos:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 5}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{4}}{5} = \frac{3 \pm 2}{5}$$

As raízes são:

$$x_1 = \frac{3 + 2}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

$$x_2 = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}.$$

3.º) *Os dois casos anteriores ocorrem simultâneamente.*

Se, na última fórmula simplificada, $x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$, substituirmos a por 1, resulta a fórmula mais simples:

$$\boxed{x = -k \pm \sqrt{k^2 - c}}$$

Exemplo: *Resolver a equação*

$$x^2 - 16x - 17 = 0.$$

Temos: $k = -8$ e $c = -17$.

Aplicando a última fórmula, resulta:

$$x = 8 \pm \sqrt{64 + 17} = 8 \pm \sqrt{81} = 8 \pm 9.$$

As raízes são: $x_1 = 17$ e $x_2 = -1$.

Observação. Para resolver uma equação do segundo grau, devemos eliminar os denominadores e transpor os têrmos de modo a dar-lhe a forma $A = 0$; em seguida aplicaremos a fórmula geral ou uma das simplificadas.

Exemplo: *Resolver a equação*

$$3x^2 - \frac{5}{8} = \frac{17x-6}{4}.$$

$$3x^2 - \frac{5}{8} = \frac{17x-6}{4}.$$

$$24x^2 - 5 = 2(17x - 6)$$

$$24x^2 - 5 - 34x + 12 = 0$$

$$24x^2 - 34x + 7 = 0.$$

Fórmula: $x = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$

Para a equação dada: $a=24$, $k=-17$ e $c=7$.

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289-168}}{24} = \frac{17 \pm \sqrt{121}}{24} = \frac{17 \pm 11}{24}.$$

Resposta: $x_1 = \dfrac{28}{24} = \dfrac{7}{6}$ e $x_2 = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$.

5. Discussão das raízes. Discriminante. A existência das raízes depende do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, pois, se o mesmo fôr negativo não terá raiz quadrada.

Podemos considerar dois casos.

Primeiro caso: $c < 0$.

Neste caso o produto de $-4a$ por c será positivo e Δ uma soma de números positivos; logo, teremos:

$$\Delta > 0.$$

A equação tem, pois, duas raízes. Além disso, o valor **absoluto de $\sqrt{\Delta}$ será maior que o de b e, portanto, as raízes terão sinais contrários.**

Segundo caso: $c > 0$.

Neste caso o produto de $-4a$ por c é negativo e Δ será uma diferença, podendo ocorrer uma das hipóteses:

Primeira hipótese: $b^2 - 4ac = 0$. *Discriminante nulo.*

É evidente que neste caso as raízes são iguais. Ambas valem $-\dfrac{b}{2a}$, e têm sinal contrário ao de b.

Segunda hipótese: $b^2 - 4ac > 0$. *Discriminante positivo.*

A equação terá duas raízes distintas, e do mesmo sinal, contrário ao de b, pois, em valor absoluto, $-b$ é maior que $\sqrt{\Delta}$.

Terceira hipótese: $b^2 - 4ac < 0$. *Discriminante negativo.*

Neste caso a equação não terá raízes pois os números negativos não têm raiz quadrada, no campo numérico até agora conhecido.

RESUMO.

$c < 0$		Raízes desiguais, de sinais contrários.
$c > 0$	$\Delta > 0$	Raízes desiguais, do mesmo sinal, contrário ao de b.
	$\Delta = 0$	Raízes iguais.
	$\Delta < 0$	A equação não tem raízes.

Exemplos:

1.º) $6x^2 - 5x - 25 = 0$.

Temos: $c < 0$. Logo, podemos concluir que a equação tem duas raízes, uma positiva e outra negativa.

2.º) $5x^2 - 11x + 2 = 0$.

Temos: $c > 0$. Formando o discriminante, obtemos:

$$b^2 - 4ac = 121 - 40 = 81 > 0.$$

A equação tem duas raízes, ambas positivas (sinal contrário ao de b).

3.º) $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Temos: $c > 0$. O discriminante é:

$$b^2 - 4ac = 400 - 400 = 0.$$

As raízes são iguais e positivas.

4.º) $x^2 + 3x + 5 = 0$.

Temos: $c > 0$. O discriminante é:

$$b^2 - 4ac = 9 - 20 = -11.$$

A equação não tem raízes, no campo numérico conhecido.

6. Equações fracionárias. Na resolução das equações fracionárias que conduzem a equações do segundo grau, é necessário considerar as restrições aos princípios de eqüivalência já estabelecidas ao estudarmos as equações do primeiro grau.

● *Achadas as raízes, é* ***necessário*** *verificá-las na equação dada.*

Exemplos:

1.º) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = 1 - \dfrac{4}{x^2-4}$

Eliminando os denominadores, cujo m.m.c. é $(x+2)(x-2)$ ou $x^2 - 4$, resulta:

$$x - 2 + x + 2 = x^2 - 4 - 4$$

ou, $x^2 - 2x - 8 = 0$. Fórmula: $x = -k \pm \sqrt{k^2 - c}$.

$$x = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \therefore \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Como a raiz -2 anula o denominador $x + 2$, conclui-se ser 4 a única raiz da equação fracionária dada.

2.º) $\dfrac{x-1}{x+1} + \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{5x}{x^2-1}$.

Resulta:

$$(x-1)^2 + (x+1)^2 = 5x$$

ou, $$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 - 5x = 0;$$

reduzindo os têrmos: $$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Resolvendo esta equação, obteremos:

$$x_1 = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Como nenhuma das raízes anula os denominadores, conclui-se que a equação fracionária dada tem duas raízes.

7. Relações entre os coeficientes e as raízes. Sabemos que as raízes da equação geral do segundo grau $ax^2+bx+c=0$, são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Somando, membro a membro, temos:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Multiplicando, membro a membro, obtemos:

$$x_1x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} =$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Concluímos as relações:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$

1.ª) *A soma das raízes é* $-\dfrac{b}{a}$.

2.ª) *O produto das raízes é* $\dfrac{c}{a}$.

Exemplos:

1.º) *Seja a equação*

$$4x^2 - 8x + 3 = 0.$$

Temos:

$$x_1 + x_2 = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_1 x_2 = \frac{3}{4}.$$

2.º) *Seja* $x^2 - 9x - 10 = 0.$

Temos:

$$x_1 + x_2 = 9$$
$$x_1 x_2 = -10.$$

Observação. As relações estudadas permitem, em casos simples, calcular mentalmente as raízes de uma equação do 2.º grau.

Exemplos:

1.º) $x^2 - 7x + 12 = 0.$

A soma das raízes é 7 e o produto 12. As raízes são, pois, 3 e 4.

2.º) $x^2 - x - 56 = 0.$

A soma das raízes é 1 e o produto -56. As raízes são, pois, os números 8 e -7, que satisfazem às duas condições.

8. Aplicações das relações.

1.ª) ***Composição da equação, dadas as raízes.*** A equação

$ax^2 + bx + c = 0$, pode ser escrita $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$,

com essa forma, podemos concluir:

- a soma das raízes, com o sinal trocado, é o *coeficiente de* x.
- o produto das raízes é o *têrmo conhecido.*

Exemplos:

1.º) *Sejam as raízes* $\dfrac{2}{3}$ e $\dfrac{3}{4}$.

A soma e o produto das raízes, serão:

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12}.$$

$$x_1 x_2 = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

A equação escrita com a forma $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$, será:

$$x^2 - \frac{17}{12}x + \frac{1}{2} = 0$$

ou, com forma geral: $12x^2 - 17x + 6 = 0.$

2.º) *Sejam as raízes*

$$3 + \sqrt{2} \quad \text{e} \quad 3 - \sqrt{2}.$$

Temos: $x_1 + x_2 = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$

$$x_1 x_2 = (3 + \sqrt{2})\ (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7.$$

A equação é: $x^2 - 6x + 7 = 0.$

2.ª) ***Achar dois números sendo dados sua soma e seu produto.*** Se considerarmos os dois números pedidos como raízes de uma equação da forma $x^2 - \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$, o coeficiente $-\dfrac{b}{a}$ será a soma e $\dfrac{c}{a}$, o produto dado. Resolvendo a equação, obteremos, então, os números pedidos.

Exemplo: *Achar dois números cuja soma é* 28 *e o produto* 195.

Formamos a equação

$$x^2 - 28x + 195 = 0.$$

Resolvendo-a, obtemos:

$$x = 14 \pm \sqrt{196 - 195} = 14 \pm 1;$$

donde $x_1 = 15$ e $x_2 = 13.$

Resposta. Os números são 15 e 13.

3.ª) ***Resolução de sistemas simples do segundo grau.***

Primeiro exemplo. Resolver o sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ xy &= 6 \end{aligned}$$

Conhecidos o produto e a soma das incógnitas, as mesmas serão raízes da equação

$$z^2 - 5z + 6 = 0,$$

pois as raízes desta equação satisfazem às mesmas condições que as incógnitas x e y.

Resolvendo a equação do segundo grau, teremos:

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \therefore \begin{cases} z_1 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

Daí, as soluções do sistema:

$$1.^a) \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases} \qquad 2.^a) \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

Segundo exemplo. Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Já temos o produto xy. Para obter a soma, multipliquemos a segunda equação por 2 e adicionemos o resultado à primeira; obteremos:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25,$$

ou, $(x + y)^2 = 25$

donde resulta: $x + y = \pm 5.$

Temos, assim, os dois sistemas:

$$1.^o) \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \qquad 2.^o) \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

que fornecem as equações do segundo grau:

$$z^2 - 5z + 6 = 0 \text{ e } z^2 + 5z + 6 = 0,$$

cujas soluções são:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -3 \\ y_4 = -2 \end{cases}$$

Terceiro exemplo. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 53 \\ x + y = 9 \end{cases}$

Elevando a segunda equação ao quadrado, temos:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 81$$

Subtraindo dêste resultado a primeira, resulta:

$$2xy = 28$$

donde $xy = 14$

Formamos, então, o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 14 \end{cases}$$

que será resolvido com a equação:

$$z^2 - 9z + 14 = 0,$$

e cujas soluções são:

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 7. \end{cases}$$

Quarto exemplo. Seja o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 48 \end{cases}$$

Elevando a primeira ao quadrado e multiplicando a segunda por 4, vem:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4$$
$$4xy = 192$$

Somando: $x^2 + 2xy + y^2 = 196$

Donde resulta: $x + y = \pm 14$

Daí, os dois sistemas do 1.º grau

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = -14 \end{cases}$$

As soluções do sistema são:

1.ª) $x_1 = 8$, $y_1 = 6$ 2.ª) $x_2 = -6$, $y_2 = -8$

OBSERVAÇÃO. Quando uma equação é do segundo grau e outra do primeiro o sistema pode ser sempre resolvido pelo processo geral de substituição, tirando-se o valor de uma das incógnitas na equação do primeiro grau e substituindo-o na do segundo. A equação final é do segundo grau.

Exemplo: *Resolver o sistema:*

$$\begin{cases} 4x^2 + 2xy + y^2 = 37 \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação em relação a y, temos:

$$y = 2x - 1 \qquad (1)$$

Substituindo êste valor na primeira, resulta:

$$4x^2 + 2x(2x - 1) + (2x - 1)^2 = 37,$$

ou $4x^2 + 4x^2 - 2x + 4x^2 - 4x + 1 - 37 = 0$

donde a equação do segundo grau:

$$12x^2 - 6x - 36 = 0$$

ou, simplificando:

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

Resolvendo esta equação, temos:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4};$$

donde: $x_1 = 2;\quad x_2 = -1{,}5.$

Substituindo cada um dos valores de x na equação (1), temos as duas soluções do sistema:

$$1.^a)\ \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \qquad 2.^a)\ \begin{cases} x_2 = -1{,}5 \\ y_2 = -4. \end{cases}$$

4.ª) ***Raízes sujeitas a uma condição dada.***

Primeiro exemplo: *Determinar* p *na equação*

$$x^2 + px + 27 = 0,$$

de modo que uma raiz seja o triplo da outra.

Temos:
$$x_1 + x_2 = -p \qquad (1)$$
$$x_1x_2 = 27 \qquad (2)$$

De acôrdo com a condição dada, concluímos:

$$x_1 = 3x_2 \qquad (3)$$

Reunindo (1), (2) e (3), formaremos um sistema que permite calcular o coeficiente p.

Substituindo x_1 por seu valor nas duas primeiras equações, resulta:

$$\begin{cases} 4x_2 = -p \\ 3x_2^2 = 27 \therefore x_2 = \pm 3. \end{cases}$$

Substituindo o valor de x_2 na primeira:

$$\pm 12 = -p \therefore p = \pm 12.$$

A equação será

$$x^2 - 12x + 27 = 0 \text{ ou } x^2 + 12x + 27 = 0.$$

Segundo exemplo: *Determinar* m *na equação*

$$x^2 - (m + 1)x + 2(m - 1) = 0,$$

de modo que uma raiz seja o dôbro da outra.

De acôrdo com as relações, temos o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 & (1) \\ x_1x_2 = 2(m - 1) & (2) \\ x_1 = 2x_2 & (3) \end{cases}$$

Resolvendo as equações (1) e (3) em relação a x_1 e x_2 obtemos, por substituição:

$$3x_2 = m + 1 \therefore x_2 = \frac{m+1}{3}$$

e, por conseguinte: $$x_1 = \frac{2(m+1)}{3}$$

Substituindo êstes valores em (2), resulta:

$$\frac{2(m+1)}{3} \times \frac{m+1}{3} = 2(m-1),$$

ou, $$\frac{2m^2 + 4m + 2}{9} = 2m - 2.$$

Eliminando o denominador e transpondo os têrmos, obtemos: $2m^2 - 14m + 20 = 0,$
ou, simplificando: $m^2 - 7m + 10 = 0,$
donde $$m = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Os valores procurados de m são: $m = 5$ e $m = 2$.

EXERCÍCIOS

● **Resolver as equações incompletas:**

1. $8x^2 - 10x = 3x^2 + 5x$ — *Resp.:* 0 e 3
2. $\frac{x^2+2}{9} = 3$ — *Resp.:* ± 5
3. $3x(x+2) = (x-3)\,2x$ — *Resp.:* 0 e -12
4. $\frac{5x^2+8}{7} = 4$ — *Resp.:* ± 2
5. $(2x+1)(3x-2) = (5x-4)(x-3) - 14$ — *Resp.:* 0 e -18
6. $\frac{x^2+1}{5} - \frac{2x^2-5}{13} = 1$ — *Resp.:* ± 3
7. $\frac{x^2+1}{3} + \frac{3x^2-1}{6} = \frac{7}{2}$ — *Resp.:* ± 2

8. $x^2 + 2px + q = q(x+1)$ — *Resp.:* 0 e $q - 2p$
9. $(4x+3)(x-2)+(2x+1)(3x-5) = 7x^2 - 11$ — *Resp.:* 0 e 4
10. $(2x+3)(x-2) = (x+1)(x-6)$ — *Resp.:* 0 e -4

● **Resolver as equações completas:**

11. $5x^2 - 11x + 2 = 0$ — *Resp.:* 2 e $\frac{1}{5}$
12. $3x^2 - 7x + 2 = 0$ — *Resp.:* 2 e $\frac{1}{3}$
13. $2x^2 - 7x - 4 = 0$ — *Resp.:* 4 e $-0{,}5$
14. $2x^2 + 11x - 13 = 0$ — *Resp.:* 1 e $-6{,}5$
15. $4x^2 - 9x + 2 = 0$ — *Resp.:* $\frac{1}{4}$ e 2
16. $x^2 + x - 2 = 0$ — *Resp.:* 1 e -2
17. $4x^2 - 16x + 13 = 0$ — *Resp.:* $\frac{4 \pm \sqrt{3}}{2}$
18. $x^2 - 11x - 900 = 0$ — *Resp.:* 36 e -25
19. $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$ — *Resp.:* $4a$ e a
20. $ax^2 + \frac{3a-2b}{4} = (2a-b)\,x$ — *Resp.:* $\frac{3a-2b}{2a}$ e 0,5
21. $bx^2 - ax + a - b = 0$ — *Resp.:* 1 e $\frac{a}{b} - 1$
22. $x^2 - \frac{n(1-x^2)}{3m-n} = x$ — *Resp.:* 1 e $-\frac{n}{3m}$
23. $x^2 - 35x + 216 = 0$ — *Resp.:* 27 e 8
24. $12x^2 + 17x + 6 = 0$ — *Resp.:* $-\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{4}$
25. $x^2 + 10x + 29 = 0$ — *Resp.:* Não tem raízes.
26. $9y^2 - 6y + 1 = 0$ — *Resp.:* $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$
27. $7x^2 + 3x - \frac{10}{7} = 0$ — *Resp.:* $\frac{2}{7}$ e $-\frac{5}{7}$
28. $11x^2 - 9x + \frac{10}{9} = 0$ — *Resp.:* $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{33}$
29. $4x^2 + 20x + 25 = 0$ — *Resp.:* $-2{,}5$

30. $x^2 + 3x - 54 = 0$ — *Resp.:* -9 e 6
31. $x^2 + 16x - 720 = 0$ — *Resp.:* -36 e 20
32. $5x^2 - 3x - 2 = 0$ — *Resp.:* 1 e $-0{,}4$
33. $9x^2 - 45x + 14 = 0$ — *Resp.:* $14/3$ e $1/3$
34. $3x^2 - 7x + 1 = 0$ — *Resp.:* $0{,}153$ e $2{,}18$ (aprox.)
35. $2x^2 - 5x + 2 = 0$ — *Resp.:* 2 e $0{,}5$
36. $x^2 - 14x + 33 = 0$ — *Resp.:* 11 e 3
37. $8x^2 - 14x + 3 = 0$ — *Resp.:* $1/4$ e $3/2$
38. $3x^2 + 5x = x^2 - \dfrac{2x+1}{3}$ — *Resp.:* $-0{,}06$ e $-2{,}77$ (ap.)
39. $5x^2 - 8x - 4 = 0$ — *Resp.:* 2 e $-0{,}4$
40. $8x^2 - 14x + 3 = 0$ — *Resp.:* $1{,}5$ e $0{,}25$
41. $3x^2 - 4x + 1 = 0$ — *Resp.:* 1 e $1/3$
42. $\dfrac{3x^2-5}{8} = \dfrac{2x-1}{4} + \dfrac{1}{2}$ — *Resp.:* $2\,\dfrac{1}{3}$ e -1
43. $4x^2 - 4x + 1 = 0$ — *Resp.:* $1/2$
44. $\dfrac{x^2}{4a} - \dfrac{(a+2m)x}{2a} + 2m = 0$ — *Resp.:* $2a$ e $4m$
45. $x^2 - 3mx + 2m^2 = n(2n - x)$ — *Resp.:* $\begin{cases} 2(m-n) \\ m+n \end{cases}$
46. $\left(x - \dfrac{2}{3}\right)\left(x - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{24}$ — *Resp.:* $\dfrac{1}{4}$ e $1\,\dfrac{1}{6}$
47. $(x-3)(2x-1) + (x+2)(2x+1) = 17$ — *Resp.:* 2 e $-1{,}5$
48. $\dfrac{x-2}{3x} + \dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{5x+2}{6}$ — *Resp.:* -1 e 4
49. $2x(1-x) + 3 = 0$ — *Resp.:* $\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$
50. $\dfrac{mx}{m+n} + \dfrac{m+2n}{(m+n)x} = 2$ — *Resp.:* $\dfrac{m+2n}{m}$ e 1

● **Resolver as equações fracionárias:**

51. $\dfrac{x-2}{x+4} = \dfrac{3x+2}{x+2}$ — *Resp.:* -1 e -6
52. $\dfrac{4x}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$ — *Resp.:* $-\dfrac{1}{6}$

53. $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{7x}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+2}{2-x}$ — *Resp.:* 4 e $-\dfrac{1}{2}$
54. $9x^{-2} + 4x^{-1} - 5 = 0$ — *Resp.:* -1 e $1{,}8$
55. $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{3}{(x-2)(x-1)}$ — *Resp.:* 3
56. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{a(1-x)}{x} = 2 + \dfrac{b^2 - a^2x}{ax}$ — *Resp.:* $a \pm b$
57. $\dfrac{x+1}{3x+2} + \dfrac{4-x}{2-3x} = \dfrac{37}{12-27x^2}$ — *Resp.:* $\dfrac{7}{6}$ e $\dfrac{1}{3}$
58. Achar as raízes da equação $\dfrac{1}{3x^2-27} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{x-3} = 1$ com êrro menor que 0,01. — *Resp.:* $-0{,}47$ e $-3{,}52$
59. Considera-se a equação $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = m$, onde m é um número dado e x a incógnita. Pede-se:

 1.º) Resolvê-la para $m = \dfrac{3}{2}$.

 2.º) Qual o valor de m para que ela admita $\dfrac{5}{2}$ por raiz?

 Resp.: $\begin{cases} 1.º)\ 3 \text{ e } 4/3 \\ 2.º)\ m = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

● **Achar a soma e o produto das raízes das equações:**

60. $3x^2 - 6x - 2 = 0$
61. $x^2\sqrt{2} - x\sqrt{6} - 18 = 0$

● **Formar a equação cujas raízes são:**

62. 12 e $7/8$ — *Resp.:* $8x^2 - 103x + 84 = 0$
63. 5 e 2 — *Resp.:* $x^2 - 7x + 10 = 0$
64. $\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{5}$ — *Resp.:* $25x^2 - 20x + 2 = 0$
65. 1 e $\dfrac{m+2n}{m}$ — *Resp.:* $mx^2 - 2(m+n)x + m + 2n = 0$

66. $\dfrac{a+b}{a-b}$ e $\dfrac{a-b}{a+b}$ *Resp.:* $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)=0$

67. Achar dois números, cuja soma s é 3,3 e o produto p é 2. *Resp.:* 2,5 e 0,8

68. Mesmo exercício para $s = 1/4$ e $p = -105/8$. *Resp.:* 15/4 e $-3{,}5$

69. Determinar os sinais das raízes da equação $x^2 - 13x + 36 = 0$, sem resolvê-la. *Resp.:* Ambas positivas.

70. Mesmo exercício para a equação $7x^2 - 18x - 5 = 0$. *Resp.:* Sinais contrários, a positiva de maior valor absoluto.

● Achar os valores de m para que as seguintes equações tenham duas raízes iguais.

71. $x^2 - (m-1)x + m - 2 = 0$ *Resp.:* $m = 3$

72. $(m-1)x^2 + 2(1-m)x - 3m = 0$ *Resp.:* 1/4

● Achar os valores de m para que as seguintes equações tenham duas raízes desiguais.

73. $(4m-1)x^2 + 12mx + 9m - 8 = 0$ *Resp.:* $m > 8/41$

74. $x^2 + 4mx + 6m^2 = 0$ *Resp.:* Impossível.

75. $3x^2 - 6x + m = 0$ *Resp.:* $m < 3$

76. Para que valores de m são iguais as raízes das seguintes equações? $mx^2+4x+2=0$; $2x^2+mx-1=0$; $3x^2+6x+m=0$; $mx^2+mx=1+0$. *Resp.:* 2, impossível, 3 e 4.

● Resolver os sistemas:

77. $\begin{cases} x+y=15 \\ xy=36 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=12;\ 3 \\ y=3;\ 12 \end{cases}$

78. $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=3;\ 4 \\ y=4;\ 3 \end{cases}$

79. $\begin{cases} x^2+y^2=194 \\ xy=65 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=13;\ 5;\ -13;\ -5 \\ y=5;\ 13;\ -5;\ -13 \end{cases}$

80. $\begin{cases} x-y=5 \\ xy=14 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=7;\ -2 \\ y=2;\ -7 \end{cases}$

81. $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2+y^2=106 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=9;\ -5 \\ y=5;\ -9 \end{cases}$

82. $\begin{cases} x+y=14 \\ x^2+y^2=100 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=8;\ 6 \\ y=6;\ 8 \end{cases}$

83. $\begin{cases} 2x^2-3y+2y^2=11 \\ y-2x=1 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=1;\ -1{,}2 \\ y=3;\ -1{,}4 \end{cases}$

84. $\begin{cases} x-y=2 \\ xy+x^2-y^2=31 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=5;\ -7 \\ y=3;\ -9 \end{cases}$

85. $\begin{cases} 9x^2-3xy+y^2=31 \\ 3x+y=11 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=2;\ 5/3 \\ y=5;\ 6 \end{cases}$

86. $\begin{cases} x^2-2x+2y+y^2=23 \\ x-y-3=0 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} x=5;\ -2 \\ y=2;\ -5 \end{cases}$

87. $\begin{cases} x+y=28 \\ x^2+y^2=634 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 25;\ 3 \\ 3;\ 25 \end{cases}$

88. $\begin{cases} x+y=12 \\ xy=35 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 7;\ 5 \\ 5;\ 7 \end{cases}$

89. $\begin{cases} x^2-y^2=119 \\ x+y=17 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases}$

90. $\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

91. $\begin{cases} x^2+y^2=0{,}25 \\ xy=0{,}12 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} \pm 0{,}3;\ \pm 0{,}4 \\ \pm 0{,}4;\ \pm 0{,}3 \end{cases}$

92. $\begin{cases} x^2-y^2=24 \\ x+y=12 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 7 \\ 5 \end{cases}$

93. $\begin{cases} x^2-y^2=96 \\ x-y=6 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 11 \\ 5 \end{cases}$

94. $\begin{cases} x^2-y^2=77/36 \\ x+y=11/6 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 3/2 \\ 1/3 \end{cases}$

95. $\begin{cases} x^2+y^2=74 \\ x+y=12 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 7;\ 5 \\ 5;\ 7 \end{cases}$

96. $\begin{cases} x^2-y^2=7 \\ x+y=7 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$

97. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=67 \\ x+y=9 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 7;\ 2 \\ 2;\ 7 \end{cases}$

98. $\begin{cases} x-y=5 \\ 3x^2-4xy=91 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 13;\ 7 \\ 8;\ 2 \end{cases}$

99. $\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ \dfrac{x}{y}=2 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} \pm 4 \\ \pm 2 \end{cases}$

100. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ xy=6 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 3;\ 2 \\ 2;\ 3 \end{cases}$

101. $\begin{cases} 2x-y=0{,}1 \\ xy=0{,}15 \end{cases}$ *Resp.:* $\begin{cases} 0{,}3;\ -0{,}25 \\ 0{,}5;\ -0{,}6 \end{cases}$

102. Determinar p na equação $x^2+px+3=0$, de modo que a diferença entre as raízes seja 2. *Resp.:* $p = \pm 4$.

103. Determinar m na equação $(2m-1)x^2+2(1-m)x+3m=0$, de modo que uma das raízes seja -1. *Resp.:* $m=3/7$.

104. Determinar m na equação $x^2-14x+m=0$, de modo que a soma dos quadrados das raízes seja 100. *Resp.:* $m=48$.

105. Substituir x por $y+m$ na equação $x^2-6x+7=0$. Que valor deve ser atribuído a m para que a equação em y tenha uma raiz nula? Resolver neste caso a equação em y.

Resp.: $m=3\pm\sqrt{2}$; $y=\pm 2\,.\sqrt{2}$

106. Determinar k na equação $\dfrac{x-2}{x+2}=k\,.\dfrac{x+2}{x-2}$, de modo que uma das raízes seja $-\dfrac{10}{3}$ e calcular a outra raiz da equação obtida.

Resp.: $k=16$; $x_2=-\dfrac{6}{5}$

107. Achar o valor de m na equação $x^2-(2m+1)x+2=0$ de modo que uma raiz seja o dôbro da outra. *Resp.:* 1 ou -2

108. Achar o valor de p na equação $x^2+px+3=0$, de modo que a soma dos quadrados das raízes seja 10. *Resp.:* ± 4

109. Achar m na equação $x^2-m(x-2)=4$, de modo que a soma dos quadrados das raízes seja 2m. *Resp.:* 4 ou 2

110. Achar k na equação $kx^2-(2k+1)x+k=0$, de modo que uma raiz seja o quádruplo da outra. *Resp.:* 2 e $-2/9$.

III. Trinômio do segundo grau. Inequações do segundo grau

A) TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

9. Definição. Dá-se o nome de trinômio do segundo grau a um polinômio racional, inteiro, do segundo grau:

$$ax^2+bx+c,$$

onde x é variável e a, b, c são constantes.

O valor numérico do trinômio depende do valor de x.

Representando por y o valor numérico do trinômio, escreve-se:

$$y=ax^2+bx+c$$

Os valores de x, para os quais o trinômio é nulo ($y=0$), chamam-se ***raízes***. As raízes do trinômio são as da equação $ax^2+bx+c=0$, que sabemos calcular.

10. Decomposição do trinômio em um produto de fatôres do primeiro grau. Consideremos o trinômio

$$y=ax^2+bx+c,$$

admitindo duas raízes desiguais.

Colocando o fator a em evidência, temos:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right),$$

somando e subtraindo $\dfrac{b^2}{4a^2}$ ao polinômio entre parênteses:

$$y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)$$

Os três primeiros têrmos do parênteses formam o quadrado do binômio $x + \frac{b}{2a}$; assim:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad (1)$$

Considerando o colchête como a diferença de dois quadrados, isto é, com a forma:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

podemos decompor a diferença entre os quadrados no produto da soma pela diferença, resultando:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

ou, ainda:

$$y = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

Observando que os segundos têrmos dos parênteses são as raízes do trinômio, concluímos finalmente:

$$\boxed{y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$$

Exemplo: *Decompor o trinômio:*

$$2x^2 - 7x + 3.$$

As raízes do trinômio são:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = 1/2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Concluímos:

$$2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - 3\right),$$

ou, ainda: $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$.

11. Variação do sinal do trinômio. Forma canônica. No estudo da variação do sinal do trinômio há três casos a considerar.

PRIMEIRO. ***O trinômio tem raízes iguais.*** ($\Delta = 0$).

Consideremos o trinômio escrito com a forma (1) da página anterior:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \qquad (1)$$

denominada ***forma canônica*** do trinômio.

Temos, de acôrdo com a hipótese, $b^2 - 4ac = 0$, e, portanto:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como o fator quadrado é necessàriamente positivo, o produto que dá o valor do trinômio, tem o sinal do fator a.

Conclui-se:

> **Quando $\Delta = 0$, o trinômio tem sempre o sinal de a, qualquer que seja o valor de x diferente de $-\frac{b}{2a}$, para o qual se anula.**

SEGUNDO. ***O trinômio não tem raízes.*** ($\Delta < 0$).

Neste caso, temos:

$$b^2 - 4ac < 0$$

e a igualdade (1) pode ser escrita com a forma:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

De acôrdo com a hipótese $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ é uma quantidade positiva; logo, a expressão entre colchêtes é sempre positiva. **O trinômio tem portanto o mesmo sinal de a, qualquer que seja o valor atribuído a x.**

Conclui-se:

Quando $\Delta<0$, o trinômio tem sempre o sinal de a, qualquer que seja o valor de x.

TERCEIRO. ***O trinômio tem duas raízes desiguais.*** ($\Delta>0$).

Representando as raízes por x_1 e x_2, suponhamos ainda

$$x_1 < x_2.$$

Os números compreendidos entre x_1 e x_2 dizem-se *interiores* ao intervalo (x_1, x_2) ou *interiores às raízes*. Os números menores que x_1 ou maiores que x_2 dizem-se *exteriores* ao intervalo (x_1, x_2) ou *exteriores às raízes*.

Isto pôsto, escrevamos o trinômio decomposto em fatôres (n.º 10):

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Atribuindo a x um valor exterior às raízes, se êste fôr maior que x_2 as duas diferenças

$$x - x_1 \quad \text{e} \quad x - x_2$$

serão ambas positivas e, se fôr menor que x_1, as mesmas diferenças serão ambas negativas. Em qualquer dos dois casos, o produto das diferenças

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

será positivo e o trinômio terá o sinal de a, que é o terceiro fator.

Atribuindo a x um valor interior, isto é:

$$x_1 < x < x_2$$

a primeira diferença, $x - x_1$, é positiva e a segunda, $x - x_2$, é negativa; logo, o produto $(x - x_1)(x - x_2)$ será negativo e o trinômio terá sinal contrário ao de a.

Conclui-se:

Quando $\Delta>0$, o trinômio tem o sinal de a para valores de x exteriores às raízes, e sinal contrário para valores compreendidos entre as raízes.

De acôrdo com os três teoremas a variação do sinal do trinômio fica resumida no quadro:

$\Delta \leqslant 0$	*Sinal constante, igual ao de a:*
$\Delta > 0$	Sinal de a para valores exteriores: $x < x_1$ ou $x > x_2$. Sinal contrário ao de a para valores interiores: $x_1 < x < x_2$.

NOTA. Para $\Delta = 0$, excluir o valor $x = -\frac{b}{2a}$.

Exemplos.

1.º) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

Temos: $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 5 = -31 \therefore \Delta < 0$.

O trinômio tem sinal constante, igual ao de a. Como a é positivo, conclui-se:

O valor do trinômio é sempre positivo.

2.º) $y = -9x^2 + 30x - 25$.

Temos: $\Delta = 900 - 4(-9)(-25) = 900 - 900 = 0$

Sinal constante, igual ao de a. Como a é negativo, conclui-se:

O valor do trinômio é sempre negativo, exceto para

$$x = -\frac{30}{-18} = \frac{5}{3}.$$

3.º) $y = x^2 - 8x - 9$.

Temos: $\Delta = 64 + 36 = 100 \therefore \Delta > 0$.

O trinômio será *positivo* (sinal de a) para valores exteriores e *negativo* (sinal contrário ao de a) para valores interiores às raízes.

As raízes são: $x_1 = -1$ e $x_2 = 9$. Conclui-se:

O trinômio é *positivo* para valores de x maiores que 9 ou menores que -1; é *negativo* para valores de x compreendidos entre -1 e 9.

4.°) $y = -2x^2 + 5x - 2$.

Temos: $\Delta = 25 - 4(-2)(-2) = 25 - 16 = 9 \therefore \Delta > 0$.

As raízes são: $x_1 = 0{,}5$ e $x_2 = 2$.

Conclui-se:

O trinômio é *negativo* (sinal de a) para valores de x maiores que 2 ou menores que 0,5. É *positivo* (sinal contrário ao de a) para valores de x compreendidos entre 0,5 e 2.

Assim, temos o quadro de variação do sinal:

Valores de x	$-\infty$ . . . 0,5 . . .	2 . . .	$+\infty$
Sinal de y	$-$	$+$	$-$

5.°) Achar os valores de x para os quais o trinômio $-3x^2 + 5x - 7$ *é positivo.*

Para que seja positivo, o trinômio deve ter sinal contrário ao de a, pois êste coeficiente é negativo.

O discriminante é:

$$\Delta = 25 - 4(-3)(-7) = 25 - 84 = -59 \therefore \Delta < 0.$$

Conclui-se: o trinômio tem sempre o sinal de a, é sempre *negativo*, e o problema é *impossível.*

6.°) Achar os valores de x para os quais o trinômio $3x^2 - 17x + 10$ *é negativo.*

Para ser negativo o trinômio deve ter sinal contrário ao de a. Temos:

$$\Delta = 289 - 120 = 169 \therefore \Delta > 0.$$

As raízes são: $x_1 = 5$ e $x_2 = \frac{2}{3}$.

O trinômio será *negativo* para valores de x compreendidos entre as raízes, isto é:

$$\frac{2}{3} < x < 5.$$

B) INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

12. Inequações do segundo grau. São do segundo grau as inequações que, feitas tôdas as reduções, apresentam-se sob uma das formas:

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ ou } ax^2 + bx + c < 0.$$

13. Resolução das inequações do segundo grau. A resolução das inequações do segundo grau é uma aplicação imediata da variação do sinal do trinômio do segundo grau; pois, achar os valores de x que as satisfazem se reduz a achar os valores de x que tornam positivo ou negativo o trinômio do primeiro membro.

Consideraremos dois casos, conforme a inequação fôr inteira ou fracionária.

PRIMEIRO CASO. ***Inequações inteiras.***

Primeiro exemplo: *Resolver a inequação*

$$3x^2 - 8x + 4 > 0.$$

Satisfarão à inequação os valores de x, que tornarem *positivo* o trinômio do primeiro membro.

Temos: $\Delta = 64 - 48 = 16 \therefore \Delta > 0$.

O coeficiente a é positivo; o trinômio terá sinal de a, isto é, será positivo, para valores de x exteriores às raízes.

As raízes são: $x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = 2$

logo, a inequação será satisfeita para os valores de x maiores que 2 e para os menores que 2/3.

Podemos formar o seguinte quadro:

x	$-\infty$ . . . 2/3 . . .	2 . . .	$+\infty$
Sinal de y	$+$	$-$	$+$

Soluções: $x > 2$ e $x < \frac{2}{3}$.

Segundo exemplo: *Resolver a inequação*

$$-x^2 + 13x - 22 > 0.$$

Temos: $\Delta = 169 - 88 = 81 \therefore \Delta > 0.$

O coeficiente a é negativo. O trinômio será positivo, e a inequação será verificada, para os valores de x interiores às raízes; estas são:

$$x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 11.$$

Quadro de variação:

x	$-\infty \ldots 2 \ldots$		$11 \ldots +\infty$
Sinal do trinômio	−	+	−

Conclui-se a solução:

$$2 < x < 11.$$

Terceiro exemplo: *Resolver a inequação*

$$x^2 - 3x + 5 < 0.$$

Temos: $\Delta = 9 - 20 = -11 \therefore \Delta < 0.$

O trinômio tem sempre o sinal do primeiro coeficiente; como êste é positivo, conclui-se que a inequação é *impossível*.

Quarto exemplo: *Achar os valores de x que verificam simultâneamente as inequações:*

$$-x^2 + 6x - 9 < 0 \text{ e } x^2 - 4x + 3 < 0.$$

a) Para o 1.º trinômio temos: $\Delta = 36 - 36 = 0.$

Logo, o trinômio será sempre negativo (sinal de a) e a primeira inequação é verificada para qualquer valor de x, diferente de

$$\frac{-b}{2a} \text{ ou } 3.$$

b) Considerando o segundo trinômio, obtemos:

$$\Delta = 16 - 12 = 4 \therefore \Delta > 0.$$

Logo, a segunda inequação é verificada para os valores de x interiores às raízes (sinal contrário ao de a).

Como as raízes são 1 e 3, concluímos a solução:

$$1 < x < 3.$$

Segundo caso. ***Inequações fracionárias.***

Transpondo todos os têrmos de uma inequação fracionária para o primeiro membro e efetuando as operações indicadas, a mesma assumirá uma das formas:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} < 0,$$

onde a, b e c podem ser nulos, mas não todos simultâneamente, e da mesma forma a', b' e c'. A questão se reduz, pois, a estudar o sinal de um quociente.

Exemplo: *Resolver* $\dfrac{x^2 - 18x + 45}{x^2 - 6x - 16} > 0.$

Numerador: raízes 3 e 15.

Denominador: raízes −2 e 8.

Representando o numerador por N e o denominador por D, formaremos o quadro de variação dos sinais, dispondo:

na 1.ª linha, em ordem crescente, de $-\infty$ a $+\infty$, os valores das quatro raízes;

nas 2.ª e 3.ª linhas, respectivamente, os sinais de N e D relativos a cada intervalo;

na 4.ª linha os sinais do quociente N/D.

Para o exemplo dado teremos o quadro:

x	$-\infty \ldots -2$	$\ldots 3$	$\ldots 8$	$\ldots 15$	$\ldots +\infty$
N	+	+	-	-	+
D	+	-	-	+	+
N/D	+	-	+	-	+

Como, no exemplo dado, $\frac{N}{D} > 0$, todos os intervalos *positivos* da quarta linha satisfazem à inequação, isto é, à inequação dada convêm os valores:

$$x < -2,\ 3 < x < 8 \text{ e } x > 15.$$

OBSERVAÇÕES.

1.ª) Se a inequação dada tivesse a forma $\frac{N}{D} < 0$ só serviriam os intervalos negativos da quarta linha.

2.ª) De modo análogo resolveremos as desigualdades, cujos primeiros membros são produtos.

Exemplo. *Resolver a desigualdade:*

$$(x^2 - 2x + 3)(2x^2 - 5x - 3) < 0.$$

Convirão à desigualdade os valores de x que tornarem o produto negativo. Temos, assim:

Primeiro fator: $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$.

O primeiro fator é positivo para *todos* os valores de x.

Segundo fator: $\Delta = 25 + 24 = 49 > 0$.

As raízes são: $x = \frac{5 \pm 7}{4} \therefore \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -0{,}5. \end{cases}$

Temos, então, representando por y' e y'' os dois trinômios, o quadro de variação dos sinais:

x	$-\infty \ldots -0{,}5$	$\ldots 3$	$\ldots +\infty$
y'	+	+	+
y''	+	-	+
$y'y''$	+	-	+

O produto é negativo para os valores de x maiores que $-0{,}5$ e menores que 3.

Solução: $-0{,}5 < x < 3$.

3.ª) Nas inequações fracionárias, quando um dos têrmos é constante, raciocina-se com a variação do sinal do outro têrmo.

Exemplo: *Resolver* $\frac{x+2}{x-1} < \frac{x+1}{x-2}$.

Transpondo o segundo membro: $\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} < 0$.

Efetuando a subtração: $\frac{x^2 - 4 - x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} < 0$

ou, $$\frac{-3}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

Como o dividendo é negativo, para que a inequação seja verificada o divisor deverá ser positivo. Temos, assim:

$$x^2 - 3x + 2 > 0.$$

As raízes do trinômio são 1 e 2; para que seja positivo, isto é, tenha o sinal do coeficiente do primeiro têrmo, x deve ser exterior às raízes. As soluções são, pois: $x < 1$ e $x > 2$.

EXERCÍCIOS

● Decompor em fatôres do primeiro grau os trinômios:

1. $2x^2 - 3x - 5$ *Resp.:* $(x + 1)(2x - 5)$
2. $2x^2 - 7x + 3$ *Resp.:* $(x - 3)(2x - 1)$
3. $3x^2 - 10x - 8$ *Resp.:* $(x - 4)(3x + 2)$
4. $12x^2 - 17x + 6$ *Resp.:* $(4x - 3)(3x - 2)$
5. $x^2 - 16x + 63$ *Resp.:* $(x - 7)(x - 9)$

● Simplificar as frações:

6. $\frac{3x^2 - 10x - 8}{2x^2 - 7x - 4}$ *Resp.:* $\frac{3x + 2}{2x + 1}$

7. $\frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 5x - 3}$ *Resp.:* $\frac{3x + 2}{2x + 1}$

8. $\dfrac{5x^2 - 34x - 7}{x^2 + 3x - 70}$ *Resp.:* $\dfrac{5x + 1}{x + 10}$

9. $\dfrac{6x^2 + 7x + 2}{9x^2 - 4}$ *Resp.:* $\dfrac{2x + 1}{3x - 2}$

10. $\dfrac{12x^2 - 17x + 6}{4x^2 + 5x - 6}$ *Resp.:* $\dfrac{3x - 2}{x + 2}$

● **Estudar a variação do sinal dos trinômios:**

11. $5x^2 - 11x + 2$ *Resp.:* negativo para $\dfrac{1}{5} < x < 2$

12. $36x^2 - 13x + 1$ *Resp.:* negativo para $\dfrac{1}{9} < x < \dfrac{1}{4}$

13. $x^2 - 5x + 36$ *Resp.:* sempre positivo

14. $-5x^2 + 8x - 3$ *Resp.:* positivo para $\dfrac{3}{5} < x < 1$

15. $36x^2 + 60x + 25$ *Resp.:* sempre positivo

16. $-5x^2 - 11x - 2$ *Resp.:* positivo para $-2 < x < -0{,}2$

17. Estudar o sinal do trinômio $2x^2 - 11x + 12$, quando x varia de 0 a 6. *Resp.:* positivo de 0 a 1,5; negativo de 1,5 a 4; positivo de 4 a 6

18. Achar o valor de m de modo que o trinômio $(2m - 1)x^2 + 2(1 - m)x + 2m$ seja positivo para qualquer valor de x. *Resp.:* $m > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

19. Achar os valores de x para os quais o trinômio $-x^2 + x + 6$ é positivo. *Resp.:* valores compreendidos entre -2 e 3.

● **Resolver as inequações:**

20. $-3x^2 + 5x - 7 < 0$ *Resp.:* qualquer valor de x

21. $-3x^2 + 5x - 4 > 0$ *Resp.:* impossível

22. $3x^2 - 5x + 2 < 0$ *Resp.:* $2/3 < x < 1$

23. $-4x^2 + 12x - 9 < 0$ *Resp.:* valores diferentes de 1,5

24. $\dfrac{x^2 + 3}{3} - \dfrac{3x - 1}{4} > 2$ *Resp.:* $x > 3$ ou $x < -\dfrac{3}{4}$

25. $\dfrac{x + 3}{x - 3} > \dfrac{x + 2}{x - 2}$ *Resp.:* $0 < x < 2$ e $x > 3$

26. $\dfrac{4 - x}{x - 3} < \dfrac{1}{x - 1}$ *Resp.:* $\begin{cases} x < 2 - \sqrt{3} \\ 1 < x < 3 \\ x > 2 + \sqrt{3} \end{cases}$

27. $\dfrac{3x + 1}{2x - 1} + 1 < \dfrac{5x + 3}{2x + 5}$ *Resp.:* $x < -2{,}5$ e $-1/8 < x < 0{,}5$

28. $(2x^2 - 3x + 1)(x^2 - 5x + 6) > 0$ *Resp.:* $1 < x < 2$; $x < 0{,}5$; $x > 3$

29. $(x^2 + x + 1)(3x^2 - 4x + 1) < 0$ *Resp.:* $1/3 < x < 1$

30. $\dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 5x + 4} > 1$ *Resp.:* $x < -7$ ou $x > 4$

31. Achar o valor de n de modo que a desigualdade $x^2 + 2x + n > 10$ seja verificada para qualquer valor de x. *Resp.:* $n > 11$

32. Comparar o número -2 com as raízes da equação $4x^2 + 5x - 9 = 0$, sem resolvê-la. *Resp.:* $x_1 < -2 < x_2$

33. Mesma questão para o número 5 e as raízes de $3x^2 + 13x - 16 = 0$. *Resp.:* $x_1 < x_2 < 5$

34. Achar o valor de m que torna o trinômio $mx^2 + (m - 1)x + m - 1$ sempre negativo. *Resp.:* $m \leqslant -1/3$

35. Achar o valor de m em $x^2 - 2(m - 2)x + m^2 - 8$ de modo que o trinômio tenha o mesmo sinal para todos os valores de x. *Resp.:* $m > +3$

36. Achar os valores de n para os quais o número -2 fica compreendido entre as raízes do trinômio $2x^2 - (n - 4)x - (n - 1)$. *Resp.:* $n < -1$

37. Quais os valores de n para que as raízes do trinômio do exercício anterior sejam inversas? *Resp.:* $n = -1$

38. Efetuar: $\dfrac{1}{2x^2 + 3x - 2} - \dfrac{1}{6x^2 - x - 1}$. *Resp.:* $\dfrac{1}{3x^2 + 7x + 2}$

39. Achar k de modo que exista $\sqrt{kx^2 - 6x + 3}$, para qualquer valor de x. *Resp.:* $k \geqslant 3$

40. Resolver a inequação $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{8}{x + 2} < 3$.

Resp.: $x < -4$, $-2 < x < -1$, $x > -\dfrac{2}{3}$

41. Resolver a inequação $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4x - 5} < 0$, em números inteiros e positivos. *Resp.:* 3 e 4

42. Resolver a inequação $\dfrac{x^2 + 11x + 24}{-x^2 + 8x - 7} > 0$, dando tôdas as soluções inteiras.
Resp.: $-7, -6, -5, -4, 2, 3, 4, 5, 6$

IV. Problemas do segundo grau

14. Definição. Um problema é do *segundo grau* quando sua resolução depende de equações do segundo grau.

15. Resolução. A equação do segundo grau pode ter uma raiz, duas ou nenhuma; assim, o problema poderá admitir uma solução, duas soluções, ou ainda ser impossível. Se as soluções do problema, em virtude do enunciado, devem verificar certas condições, nem sempre as raízes da equação satisfazem ao problema. Não há porém dificuldade em selecionar as raízes convenientes no caso particular de um problema numérico. Nos problemas gerais far-se-á a *discussão.*

Para *pôr o problema em equação* procede-se como para os do primeiro grau.

16. Problemas do segundo grau com uma incógnita.

I. *Qual o número que se deve adicionar a cada fator do produto* 5 × 13, *para que êsse produto, aumente de* 175 *unidades?*

Resolução: Seja x o número procurado.

O produto dos números dados é 5 × 13 ou 65; o dos números aumentados de x será

$$(5 + x)(13 + x)$$

Como a diferença entre os produtos é 175, devemos ter:

$$(5 + x)(13 + x) - 65 = 175$$

ou,

$$x^2 + 18x - 175 = 0.$$

Resolvendo a equação, obteremos: $x_1 = 7$ e $x_2 = -25$.

Resposta: **O número que se deve somar é 7 ou −25.**

II. *Se aumentarmos a base de um quadrado de 6m e diminuirmos a altura de 4m, obteremos um retângulo de 30 ares. Calcular o lado do quadrado.*

Resolução: Seja x o comprimento do lado do quadrado, em metros.

De acôrdo com o enunciado, formaremos um retângulo, cujas dimensões medem $x + 6$ e $x - 4$ metros. A área dêsse retângulo será de 30a ou 3 000m². Temos, assim, a equação

$$(x + 6)(x - 4) = 3\,000$$

ou,

$$x^2 + 2x - 3\,024 = 0.$$

A única raiz que convém ao problema é a positiva; assim, temos:

$$x = -1 + \sqrt{3\,025} = -1 + 55 = 54.$$

Resp.: O lado do quadrado tem 54m.

III. *Dois operários, que percebem diárias diferentes, trabalham vários dias. O operário* A *falta 2 dias ao trabalho e recebe ao todo* Cr$ 7 000,00; B *falta 6 dias e recebe* Cr$ 5 400,00. *Se* A *tivesse faltado* 6 *dias e* B, 2 *dias*, A *teria recebido* Cr$ 300,00 *menos que* B. *Quantos dias durou o trabalho e qual a diária de cada operário?*

Resolução: Seja x o número de dias de trabalho.

O operário A faltou 2 dias, logo trabalhou $x - 2$. Como recebeu Cr$ 7000,00, sua diária será

$$\frac{7000}{x - 2},$$

tomando para unidade o *cruzeiro*.

B faltou 6 dias e recebeu Cr$ 5400,00, logo terá por diária

$$\frac{5400}{x = 6}$$

Se A tivesse faltado 6 dias teria trabalhado $x - 6$ dias; como recebe por dia $\frac{7000}{x - 2}$, teria recebido

$$\frac{(x - 6) \times 7000}{x - 2}.$$

Anàlogamente, se B tivesse faltado 2 dias, teria recebido

$$\frac{(x - 2) \times 5400}{x - 6}$$

Pelo enunciado, A teria recebido Cr$ 300,00 menos que B, logo, temos a equação:

$$\frac{5400\,(x - 2)}{x - 6} - \frac{7000\,(x - 6)}{x - 2} = 300$$

Só convêm ao problema as raízes positivas maiores que 6. Eliminando os denominadores, cujo menor múltiplo comum é

$$(x - 2)(x - 6)$$

resulta:

$$5400\,(x - 2)^2 - 7000\,(x - 6)^2 = 300\,(x - 2)(x - 6)$$

Simplificando o fator 10 e efetuando as multiplicações, temos:

$$54x^2 - 216x + 216 - 70x^2 + 840x - 2\,520 = 3x^2 - 24x + 36.$$

Donde, transpondo e reduzindo:

$$19x^2 - 648x + 2\,340 = 0.$$

A equação tem duas raízes positivas:

$$x_1 = \frac{324 + \sqrt{60\,516}}{19} = \frac{324 + 246}{19} = 30$$

$$x_2 = \frac{324 - 246}{19} = \frac{78}{19} = 4\frac{2}{19}$$

Êstes números não anulam o m.m.c., logo, são raízes da equação fracionária.

Como ao problema só convêm os valores de x maiores que 6, conclui-se a única solução

$$x = 30$$

Assim, o trabalho durou 30 dias; a diária do operário A foi de

$$\frac{7000}{x-2} = \frac{7000}{28} = 250$$

e a do operário B

$$\frac{5400}{x-6} = \frac{5400}{24} = 220{,}5$$

Resp.: 30 dias de trabalho, Cr$ 250,00 e Cr$ 225,00.

IV. *Decompor* 100 *em duas parcelas, cujo produto seja* 2 560.

Resolução. Seja x uma das parcelas. A outra será $100 - x$.

O produto das duas parcelas será

$$x\,(100 - x).$$

Como, em virtude do enunciado, o produto é 2 560, temos a equação:

$$x\,(100 - x) = 2\,560,$$

ou,

$$x^2 - 100x + 2\,560 = 0$$

A equação não tem raízes e o problema é impossível.

Observação. Verifica-se pelo discriminante que o problema só seria possível se o produto fôsse no máximo igual a 2 500, caso em que as parcelas seriam ambas iguais a 50, isto é, à metade do número dado.

V. *Qual o polígono que tem 35 diagonais?*

Resolução. **A incógnita é o número de lados; seja** n.

A fórmula do número de diagonais é:

$$d = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

Substituindo d por 35, resulta:

$$35 = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

Eliminando o denominador e parênteses, obteremos a equação do segundo grau:

$$n^2 - 3n - 70 = 0,$$

que tem duas raízes de sinais contrários. Como o número de lados é necessàriamente positivo, temos:

$$n = \frac{3 + \sqrt{9 + 280}}{2} = \frac{3 + 17}{2} = 10.$$

Resp.: O polígono convexo que tem 35 diagonais distintas é o decágono.

17. Problemas do segundo grau com duas incógnitas.

I. *Um retângulo tem* $120m^2$ *de área. Aumentando-se a base de* $5m$ *e diminuindo a altura de* $4m$, *obtém-se um retângulo da mesma área. Calcular as dimensões do retângulo.*

Resolução: Sejam x e y as dimensões procuradas. As do segundo retângulo serão $x + 5$ e $y - 4$. Temos, assim, as equações

$$\begin{cases} xy = 120 \\ (x + (5\,(y - 4) = 120 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} xy = 120 \\ xy + 5y - 4x - 20 = 120 \end{cases}$$

Substituindo, na segunda equação, o produto xy por seu valor, resulta, feitas as simplificações:

$$\begin{cases} xy = 120 \\ 5y - 4x = 20 \end{cases}$$

Resolvendo, por substituição, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{20 + 4x}{5} \\ \\ x \times \dfrac{20 + 4x}{5} = 120 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Resolvendo a equação de uma incógnita, vem, sucessivamente:

$$20x + 4x^2 = 600$$

ou,

$$x^2 + 5x - 150 = 0$$

A equação tem duas raízes de sinais contrários. Considerando a positiva, que satisfaz ao problema, temos:

$$x = \frac{-5 + \sqrt{25+600}}{2} = \frac{-5+25}{2} = 10$$

Substituindo o valor de x em (1):

$$y = \frac{20 + 40}{5} = 12$$

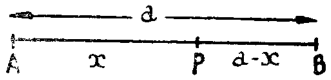
Resp.: As dimensões são. 10 m e 12 m

18. Divisão áurea.

Segmento áureo. Diz-se que um ponto divide um segmento em média e extrema razão quando a parte maior, denominada *segmento áureo*, é média proporcional entre o segmento total e a parte menor.

Assim, na figura abaixo, o ponto P dividirá o segmento AB em média e extrema razão, se tivermos:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB}$$



Suponhamos dado o segmento AB de comprimento igual a a. Trata-se de achar um segmento x, que satisfaça a equação da definição:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

Resolvendo a equação, vem:

$$x^2 = a^2 - ax \quad \text{ou} \quad x^2 + ax - a^2 = 0$$

Donde: $$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}$$

Simplificando: $$x = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

A raiz positiva que é o segmento áureo, será:

$$x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

ou, tomando o valor aproximado da raiz:

$$\boxed{x \cong 0{,}618a}$$

EXERCÍCIOS

1. Achar dois números inteiros e consecutivos, cuja soma dos quadrados é 545. *Resp.:* ± 16 e ± 17

2. O produto de dois números ímpares consecutivos excede a soma dêles de 47 unidades. Achar os números. *Resp.:* 7 e 9 ou -7 e -5

3. A diferença entre um número e 50 vêzes o seu recíproco é 5. Achar o número. *Resp.:* 10 ou -5

4. Dividir um segmento de 13cm em duas partes, de modo que, tomando-as como dimensões de um retângulo, êste tenha 36cm² de área. *Resp.:* 9cm; 4cm

5. A soma de dois números é 22 e o produto 105. Quais são os dois números? *Resp.:* 7 e 15

6. Achar dois números pares consecutivos, cujo produto seja 168. *Resp.:* 12 e 14 ou -12 e -14

7. A diferença entre os cubos de dois números inteiros consecutivos é 217. Achar os números. *Resp.:* ± 8 e ± 9

8. A soma de dois números é 12 e a soma de seus quadrados 74. Achar os números. *Resp.:* 7 e 5

9. A diferença entre dois números é 3 e a soma de seus quadrados, 117. Achar os números. *Resp.:* 9 e 6 ou -9 e -6

10. Qual o número que se deve adicionar a cada fator do produto 7×9, para que êste aumente de 80 unidades? *Resp.:* 4 ou -20
11. Quantos lados tem o polígono convexo de 9 diagonais? *Resp.:* 6 lados
12. A razão entre dois números é $\frac{7}{3}$ e a diferença entre seus quadrados 3 240. Achar os dois números. *Resp.:* ± 63 e ± 27
13. Decompor 96 em dois fatôres, cuja soma dos quadrados seja 208. *Resp.:* 12 e 8 ou -12 e -8
14. A diferença entre os perímetros de dois quadrados é de 32m e a diferença entre as áreas de $176m^2$. Achar os lados. *Resp.:* 7m e 15m
15. Achar dois números, cuja média aritmética é 3,4 e a média geométrica 3. *Resp.:* 1,8 e 5
16. O perímetro de um retângulo é de 34m e a área, de $60m^2$. Achar os lados. *Resp.:* 12 e 5 metros
17. Dois retângulos têm a mesma área de $360m^2$. A diferença entre seus comprimentos é de 3m e entre suas larguras, de 4m. Achar as dimensões dos dois retângulos. *Resp.:* 18m, 20m, 15m e 24m
18. Achar dois números tais que, adicionando 1 ao primeiro e 8 ao segundo, a razão entre as somas é $\frac{1}{2}$ e, subtraindo-lhes uma unidade, a razão entre as diferenças é $\frac{2}{3}$. *Resp.:* 11 e 16
19. Um número é composto de dois algarismos, cujo produto é 24. Trocando a posição dos algarismos, o número resultante excederá de 18 unidades o primitivo. Achar o número. *Resp.:* 46
20. Quantos lados tem o polígono convexo de 35 diagonais? *Resp.:* 10
21. Qual o polígono convexo, cujo número de lados é igual ao de diagonais? *Resp.:* pentágono
22. Qual o polígono, cujo número de lados é a metade do de diagonais? *Resp.:* heptágono
23. Qual o polígono, cujo número de diagonais excede o de lados de 18 unidades. *Resp.:* eneágono
24. Quais os dois números, cuja soma é $6\frac{2}{3}$ e o produto é 4? *Resp.:* 6 e 2/3
25. Achar dois números cuja soma seja 4 e o produto 3,75. *Resp.:* 1,5 e 2,5
26. Um trem percorre 300km com velocidade constante. Se aumentasse a velocidade de 5km/h, gastaria 2 horas menos no percurso. Determinar a velocidade. *Resp.:* 25km/h
27. Uma herança de 280 mil cruzeiros deve ser repartida entre várias pessoas. Antes da partilha, três herdeiros falecem, o que acarreta um aumento de 12 mil cruzeiros na parte de cada um dos restantes. Qual o número primitivo de herdeiros? *Resp.:* 10

28. A soma de dois números é 27 e a soma dos inversos 1/6. Determinar os números. *Resp.:* 18 e 9
29. Alguns rapazes quotizaram-se para adquirir um barco de Cr$ 24 000,00. Como dois dêles desistissem, a quota de cada um dos outros ficou aumentada de Cr$ 400,00. Quantos eram os rapazes? *Resp.:* 12
30. Um homem contrata fazer um serviço por Cr$ 4200,00. Despende no trabalho 6 dias mais do que supunha e verifica ter ganho por dia Cr$ 80,00 menos do que premeditara. Em quantos dias supôs que concluiria o serviço? *Resp.:* 15 dias
31. Uma pessoa, que fêz uma viagem de 240km, teria gasto menos 2 dias se caminhasse mais 4km por dia. Quantos dias gastou na viagem e quantos quilômetros andou por dia? *Resp.:* 12 dias, 20km
32. Dois operários gastam 6 dias para fazer juntos certa obra. O primeiro gasta 5 dias mais que o segundo para fazê-la sòzinho. Quantos dias gastaria o segundo se trabalhasse isoladamente? *Resp.:* 10 dias
33. Dois ciclistas, A e B, partem no mesmo instante, em sentidos contrários, de duas localidades distanciadas de 20km. Encontram-se depois de 40 minutos de percurso. O ciclista A levou uma hora menos que B a percorrer os 20km. Achar as velocidades dos ciclistas. *Resp.:* 20km/h e 10km/h
34. Duas torneiras, funcionando juntas, podem encher um reservatório em 24 minutos. Se funcionarem isoladamente, a segunda gastará 36 minutos mais que a primeira. Achar o tempo que gasta cada uma delas para encher o reservatório. *Resp.:* 36min e 1h 12min
35. Dois móveis, A e B, percorrem uma circunferência de 120m de comprimento. O móvel A gasta 3 segundos menos que B em percorrê-la, por ser animado de uma velocidade maior de 2 metros por segundo. Achar as velocidades em metros por segundo. *Resp.:* 10m/s e 8m/s
36. Numa proporção, a soma dos meios é 7, a dos extremos é 8 e a soma dos quadrados de todos os têrmos 65. Qual a proporção?

    Resp.: $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$
37. Carlos Augusto gastou Cr$ 120,00 na compra de cadernos. Se cada caderno custasse menos Cr$ 5,00, poderia ter comprado mais 4 cadernos. Quantos cadernos comprou? *Resp.:* 8
38. Calcular o segmento áureo de um segmento de 6cm. *Resp.:* 3,708cm
39. Calcular a área de um retângulo, cuja base tem 4dm e a altura é o segmento áureo da base. *Resp.:* $9,88dm^2$
40. Calcular a área de um retângulo, cuja altura é o segmento áureo da base e a soma das duas dimensões é 8,09m. *Resp.:* $15,45m^2$

V. Equações redutíveis ao segundo grau

A) EQUAÇÕES BIQUADRADAS

19. Definição. Forma geral da equação.

Chama-se ***equação biquadrada***, a equação incompleta do *quarto grau*, que, feitas as reduções, contém apenas têrmos de grau par.

De acôrdo com a definição, a forma geral da equação é:

$$\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c = 0.} \qquad (1)$$

20. Resolução. Como a equação biquadrada (1) contém a primeira e segunda potências de x^2, pode ser resolvida por intermédio de uma equação de segundo grau, fazendo-se:

$$\boldsymbol{x^2 = y} \qquad (2)$$

donde resulta: $\boldsymbol{x^4 = y^2.}$

Obtém-se, assim, a equação:

$$ay^2 + by + c = 0,$$

que se denomina *resolvente*.

Suponhamos que a resolvente *tenha raízes* e sejam y_1 e y_2 seus valores. Substituindo êstes valores na equação (2), obteremos:

$$x^2 = y_1 \text{ e } x^2 = y_2.$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros, resultam quatro valores para x:

$$x_1 = \sqrt{y_1},\ x_2 = -\sqrt{y_1},\ x_3 = \sqrt{y_2} \text{ e } x_4 = -\sqrt{y_2}.$$

Exemplos:

1.º) *Seja a equação*

$$9x^4 - 40x^2 + 16 = 0.$$

Fazendo $x^2 = y$. . . . . (1)
obtemos a resolvente:

$$9y^2 - 40y + 16 = 0.$$

Resolvendo esta última equação, obteremos:

$$y = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 144}}{9} = \frac{20 \pm 16}{9} \therefore \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = \dfrac{4}{9}. \end{cases}$$

Substituindo os valores em (1), resultam as equações:

$$x^2 = 4 \quad \text{e} \quad x^2 = \frac{4}{9}$$

donde concluímos:

$$x = \pm \sqrt{4} = \pm 2 \text{ e } x = \pm \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3}.$$

As quatro raízes são:

$$x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = \frac{2}{3} \text{ e } x_4 = -\frac{2}{3}.$$

2.º) *Seja a equação*

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

A resolvente é $\quad y^2 - 5y - 36 = 0,$
cujas raízes são:

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \therefore \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

A raiz quadrada de -4 não existe. Logo, a equação dada tem apenas duas raízes:

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = -3.$$

3.º) *Seja a equação*

$$3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$$

A resolvente será: $3y^2 + 5y + 2 = 0$
Donde

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6} \therefore \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = -\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Assim, as raízes da resolvente são ambas negativas e a equação biquadrada não tem raízes.

21. Discussão das raízes. A cada raiz *positiva* da resolvente corresponderá um *par* de raízes *simétricas* da biquadrada. Assim, podemos considerar os casos seguintes, em que supomos sempre positivo o coeficiente a (pág. 15 n.º 1).

PRIMEIRO CASO: $c < 0$. Neste caso, as raízes da resolvente $ay^2 + by + c = 0$ existem e têm sinais contrários, isto é, uma é positiva e outra negativa; logo, a equação biquadrada terá *duas* raízes.

SEGUNDO CASO: $c > 0$. Neste caso, se as raízes da resolvente existirem, terão o mesmo sinal, contrário ao de b; logo, devemos distinguir duas hipóteses:

1.ª) $b \geqq 0$. As raízes da resolvente, se existirem, serão *ambas negativas* e, conseqüentemente, a equação biquadrada *não terá raízes*.

2.ª) $b < 0$. Se as raízes da resolvente existirem, serão *ambas positivas* e a biquadrada terá *quatro raízes*. A existência das raízes da resolvente depende do discriminante; assim, temos:

Se $b^2 - 4ac \geqq 0$, a biquadrada terá *quatro raízes*.
Se $b^2 - 4ac < 0$, a biquadrada *não terá* raízes.

TERCEIRO CASO: $c = 0$. Neste caso, uma das raízes da resolvente é nula e, portanto, serão nulas duas da biquadrada.

Existirão outras duas raízes se b fôr negativo e nenhuma outra se b fôr positivo.

Resumo. $a > 0.$

1.º) $c < 0$			*duas* raízes
2.º) $c > 0$	$b \geqslant 0$		*nenhuma* raiz
	$b < 0$	$\Delta \geqslant 0$.	*quatro* raízes
		$\Delta < 0$.	*nenhuma* raiz
3.º) $c = 0$	$b > 0$		*duas* raízes
	$b < 0$		*quatro* raízes, duas nulas
	$b = 0$		*quatro* raízes nulas

Exemplos:

1.º) *Seja a equação*

$$27x^4 - 6x^2 - 1 = 0$$

Temos: $c = -1 < 0.$

Logo, a equação tem *duas* raízes.

2.º) *Seja a equação*

$$20x^4 + 22x^2 + 7 = 0.$$

Temos: $c > 0$ e $b > 0.$

Logo, a equação *não tem raízes.*

3.º) *Seja a equação*

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Temos: $c > 0$ e $b < 0.$

É necessário formar o discriminante, obtendo-se:

$$\Delta = 100 - 36 = 64$$

Como $\Delta > 0$, podemos concluir que a equação tem *quatro raízes.*

22. Fórmula de resolução. Dada a equação

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

mediante a condição: $x^2 = y$. . . . . (1)

obtemos a resolvente: $ay^2 + by + c = 0.$

Aplicando a fórmula de resolução das equações do segundo grau, resulta:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Substituindo o valor de y na equação (1), temos:

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Extraindo a raiz quadrada, resulta, finalmente, a fórmula

$$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

Observação. A fórmula pode ser simplificada nos mesmos casos da equação do segundo grau.

Exemplo. *Seja a equação*

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

Aplicando a fórmula, resulta:

$$x = \pm\sqrt{\frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{29 \pm \sqrt{441}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{29 \pm 21}{2}}$$

Combinando os sinais, obtemos as raízes:

$$x_1 = \sqrt{\frac{29+21}{2}} = \sqrt{25} = 5 \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{29+21}{2}} = -5$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{29-21}{2}} = \sqrt{4} = 2 \qquad x_4 = -2$$

B) EQUAÇÕES IRRACIONAIS

23. Definição. Uma equação é irracional quando contém incógnitas submetidas a radical ou com expoentes fracionários.

Assim, as equações:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 2 \quad \text{e} \quad x^{\frac{2}{3}} - 9x^{\frac{1}{3}} + 8 = 0,$$

são irracionais.

24. Princípio fundamental de resolução. *Elevando-se os dois membros de uma equação a uma mesma potência, obtém-se uma segunda equação que admite tôdas as raízes da equação dada e pode, ainda, ser verificada por outras raízes, estranhas à equação dada.*

Demonstração. Seja a equação:

$$A = B, \qquad (1)$$

onde A e B são polinômios que contêm a incógnita.

Elevando os dois membros ao quadrado obtém-se:

$$A^2 = B^2$$

ou

$$A^2 - B^2 = 0 \qquad (2)$$

Decompondo o primeiro membro em fatôres, resulta:

$$(A + B)\,(A - B) = 0$$

A esta última equação satisfazem os valores da incógnita, que anulam um dos fatôres:

$$A - B \text{ ou } A + B$$

Os que tornam nulo o primeiro dêsses fatôres são raízes da equação dada

$$A - B = 0 \text{ ou } A = B,$$

e os que tornam nulo o segundo, são raízes da equação

$$A + B = 0 \text{ ou } A = -B.$$

e são, portanto, estranhas à equação dada.

Quando $A + B$ é diferente de zero para todos os valores de x, as equações (1) e (2) são eqüivalentes.

25. Resolução. Para resolver uma equação irracional elevam-se os dois membros a uma potência conveniente, com o fim de eliminar os radicais que nela figuram. Resolve-se a equação racional obtida. Em seguida *é necessário verificar* as raízes *obtidas, na equação dada,* e rejeitar as raízes estranhas.

Em certos casos, é possível estabelecer condições a que devem satisfazer as raízes da equação dada e, assim, evitar o trabalho de verificação. Dada, por exemplo, a equação

$$\sqrt{x} = x - 6,$$

em que o primeiro membro é positivo, podemos concluir que a incógnita deve satisfazer à condição

$$x > 6,$$

de forma a ser também positivo o segundo membro.

26. Principais tipos.

PRIMEIRO TIPO. ***Equações com um único radical.*** Neste caso, isola-se o radical em um dos membros e elevam-se os dois membros a uma potência de grau igual ao índice.

Exemplos.

1.º) *Resolver a equação*

$$x + \sqrt{x + 5} = 7.$$

Isolando o radical, temos:

$$\sqrt{x + 5} = 7 - x \qquad (1)$$

Como o primeiro membro é positivo, a incógnita deve satisfazer à condição: $x < 7$ (2)

Assim, elevando ao quadrado os dois membros da equação (1), resulta a racional resolvente:

$$x + 5 = 49 - 14x + x^2$$

ou,

$$x^2 - 15x + 44 = 0,$$

cujas raízes são: $x_1 = 4$ e $x_2 = 11$.

Apenas a primeira raiz da equação racional satisfaz à condição (2), logo, a equação irracional dada tem a única raiz $x = 4$.

2.º) *Resolver a equação*

$$\sqrt[3]{9x - 6} = 1$$

Elevando os dois membros ao cubo, resulta a equação racional: $9x - 6 = 1$

donde $x = \dfrac{7}{9}$.

Segundo tipo. *Equações com dois ou mais radicais do segundo grau.* Quando a equação irracional contém dois ou mais radicais do segundo grau, é sempre possível obter a equação racional resolvente procedendo a duas ou mais elevações ao quadrado.

Exemplo. *Resolver a equação*

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3} = 1.$$

Elevando os dois membros ao quadrado, vem:

$$2x - 1 + x + 3 - 2 \,.\, \sqrt{(2x-1)(x+3)} = 1$$

ou, isolando o radical e reduzindo os têrmos:

$$2\sqrt{(2x-1)(x+3)} = 1 + 3x$$

Elevando novamente os dois membros da última equação ao quadrado, resulta a equação racional:

$$4(2x-1)(x+3) = 1 + 6x + 9x^2,$$

ou, $$8x^2 + 20x - 12 = 1 + 6x + 9x^2,$$

donde a equação do segundo grau:

$$x^2 - 14x + 13 = 0,$$

cujas raízes são 1 e 13.

Verificação:

a) Para $x = 1$, temos, substituindo na equação dada:

$$\sqrt{2-1} - \sqrt{1+3} = 1 - 2 = -1.$$

A raiz 1 não verifica a equação.

b) Para $x = 13$, temos:

$$\sqrt{26-1} - \sqrt{13+3} = 5 - 4 = 1$$

A raiz $x = 13$, verifica a equação.

Observemos, com os exemplos, que, tanto podemos estabelecer desigualdades restritivas, como ***verificar****, na equação dada*, cada uma das raízes obtidas com a resolução da equação racional.

27. Artifícios de cálculo. Os artifícios comumente usados consistem no emprêgo de incógnitas auxiliares. A introdução de incógnitas auxiliares é indicada quando as expressões que contêm incógnita são iguais ou inversas, pois, neste caso, os radicais correspondentes podem ser representados por uma única letra, evitando-se a elevação à potência.

Exemplos.

1.º) *Resolver a equação*

$$2\sqrt{x^2-2x+9} - 1 = \frac{15}{\sqrt{x^2-2x+9}}$$

Fazendo $$\sqrt{x^2-2x+9} = y \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

devemos ter $$y > 0.$$

Resulta a equação racional:

$$2y - 1 = \frac{15}{y},$$

ou $$2y^2 - y - 15 = 0$$

donde $$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{4} = \frac{1 \pm 11}{4}$$

Como y deve ser ***positivo***, temos:

$$y = \frac{1+11}{4} = 3$$

Substituindo o valor de y na equação (1) e elevando os dois membros ao quadrado, resulta a equação racional em x:

$$x^2 - 2x + 9 = 9$$

ou $$x^2 - 2x = 0$$

cujas raízes são:

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2.$$

2.º) *Resolver a equação*

$$\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} + \sqrt{\frac{x-5}{3x-4}} = \frac{5}{2}$$

Fazendo $$\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

resulta $$\sqrt{\frac{x-5}{3x-4}} = \frac{1}{y} \text{ e } y > 0.$$

A equação racional será:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}.$$

Resolvendo-a, teremos, sucessivamente:

$$2y^2 + 2 = 5y$$

ou, $$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

donde: $$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

As raízes são: $y_1 = 2$ e $y_2 = \frac{1}{2}$.

Os dois valores de y são positivos e convêm. Substituindo o primeiro valor na equação (1) e elevando-a ao quadrado, teremos:

$$\frac{3x-4}{x-5} = 4$$

donde: $$4x - 20 = 3x - 4$$

e finalmente: $$x = 16.$$

Substituindo o segundo valor de y e quadrando, vem:

$$\frac{3x-4}{x-5} = \frac{1}{4}$$

donde: $$12x - 16 = x - 5$$

e, finalmente: $$x = 1.$$

A equação irracional dada admite as duas raízes:

$$x = 1 \text{ e } x = 16.$$

C) TRANSFORMAÇÃO DAS EXPRESSÕES DA FORMA $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

28. Transformação. As raízes da equação biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$, são obtidas pela fórmula:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Se $b^2 - 4ac$ não fôr quadrado, as raízes serão irracionais com radical duplo, podendo ser escritas com a forma

$$x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}$$

Assim, se fizermos:

$$-\frac{b}{2a} = A \text{ e } \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = B, \qquad (1)$$

a expressão das raízes será:

$$x = \pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}}.$$

Para obter as raízes com êrro prefixado, é útil transformar o ***radical duplo*** na soma ou diferença de ***radicais simples***, o que, em certos casos, é possível.

Considerando as raízes

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}},$$

suponhamos, então, a transformação possível e representemos por y e z os radicandos dos radicais simples. Resultarão as igualdades:

$$\begin{cases} \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \\ \sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \end{cases} \qquad (2)$$

Somando e depois subtraindo, vem:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{y}$$
$$\sqrt{A + \sqrt{B}} - \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{z}$$

Quadrando cada uma e simplificando, teremos y e z:

1.º) $$A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B} + 2\sqrt{A^2 - B} = 4y$$

$$2A + 2\sqrt{A^2 - B} = 4y$$

$$\therefore y = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

2.º) $$A - \sqrt{B} + A - \sqrt{B} - 2\sqrt{A^2 - B} = 4z$$

$$2A - 2\sqrt{A^2 - B} = 4z$$

$$z = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Como y e z são racionais por hipótese, $A^2 - B$ deve ser um quadrado, isto é:

$$A^2 - B = C^2$$

concluindo-se:

$$y = \frac{A + C}{2} \text{ e } z = \frac{A - C}{2}.$$

Substituindo êstes valores nas igualdades (2), temos, reunindo as duas, a fórmula de transformação:

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}}$$

onde $$C = \sqrt{A^2 - B}$$

Exemplos:

1.º) ***Seja o radical duplo***

$$\sqrt{5 + \sqrt{21}}.$$

Temos: $$A^2 - B = 25 - 21 = 4.$$

Concluímos que a transformação é possível e $C = 2$.

Aplicando a fórmula de transformação, resulta:

$$\sqrt{5 + \sqrt{21}} = \sqrt{\frac{5+2}{2}} + \sqrt{\frac{5-2}{2}} = \sqrt{3{,}5} + \sqrt{1{,}5}.$$

2.º) ***Seja o radical***

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}.$$

Introduzindo o fator 2 no radical, obtemos:

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 - \sqrt{20}}.$$

Logo: $A^2 - B = 36 - 20 = 16,$ donde $C = 4.$

Aplicando a fórmula:

$$\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5} - 1.$$

EXERCÍCIOS

● **Resolver as equações biquadradas (Respostas na pág. 93) :**

1. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$
2. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$
3. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
4. $36x^4 - 13x^2 + 1 = 0$
5. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
6. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
7. $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$
8. $x^4 - x^2 = 20$
9. $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$
10. $2x^{-4} - 7x^{-2} + 5 = 0$
11. $2x^2(x^2 - 2) = 3 - 2x^4$
12. $x^4 - 2(a^2+1)x^2 + (a^2-1)^2 = 0$
13. $7x^4 - 22x^2 + 3 = 0$
14. $x^4 + \dfrac{2x^2+37}{3} = 8 + \dfrac{x^4 + 30}{2}$
15. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
16. $x^4 - 4x^2 - 45 = 0$
17. $x^4 + 20x^2 + 64 = 0$
18. $\dfrac{x^2 + 1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{11}{12}$
19. $(x^2 - a)(x^2 - b) - (a - x^2)(x^2 - b) = 0$
20. $x(x + 2) = \dfrac{45}{x(x-2)}$
21. $\left(x^2 - \dfrac{2}{3}\right)\left(x^2 - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{5}{24}$
22. $\dfrac{1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2} = 2$
23. $x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + (a^2-b^2)^2 = 0$
24. $x^4 + 4abx^2 - (a^2-b^2)^2 = 0$
25. $6x^4 = x^2 + 1$
26. $x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4 = 0$

● Formar a equação biquadrada que admita as raízes:

27. $\pm \frac{1}{2}$ e $\pm \frac{1}{3}$
28. $\pm \sqrt{7 \pm 2\sqrt{6}}$
29. ± 3 e $\pm \sqrt{5}$
30. $\pm \sqrt{2}$ e $\pm \sqrt{3}$
31. 0 e ± 7
32. 0 e $\pm \sqrt{2}$
33. ± 5 e ± 9
34. $\pm a$ e $\pm b$
35. $\pm \sqrt{m}$ e $\pm \sqrt{n}$
36. 0 e $\pm \sqrt{a}$

● Determinar o número de raízes das seguintes equações, sem resolvê-las.

37. $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$
38. $4x^4 - 8x^2 + 5 = 0$
39. $5x^4 - 11x^2 + 2 = 0$
40. $27x^4 - 11x^2 + 2 = 0$
41. $x^4 + x^2 - 132 = 0$
42. $5x^4 - 7x^2 + 2 = 0$

● Transformar os radicais

43. $\sqrt{4 - \sqrt{7}}$ *R.:* $\sqrt{3,5} - \sqrt{0,5}$
44. $\sqrt{5 - \sqrt{21}}$ *R.:* $\sqrt{3,5} - \sqrt{1,5}$
45. $\sqrt{6 + \sqrt{11}}$ *R.:* $\sqrt{5,5} + \sqrt{0,5}$
46. $\sqrt{12 + \sqrt{80}}$ *R.:* $\sqrt{10} + \sqrt{2}$
47. $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ *R.:* $2 + \sqrt{3}$
48. $\sqrt{15 - 4\sqrt{14}}$ *R.:* $2\sqrt{2} - \sqrt{7}$
49. $\sqrt{2(4 - 2\sqrt{3})}$ *R.:* $\sqrt{6} - \sqrt{2}$
50. $\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\sqrt{7}}$ *R.:* $\sqrt{\frac{7}{12}} + \sqrt{\frac{1}{12}}$
51. $\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}}$ *R.:* $\sqrt{a} - \sqrt{b}$
52. $\sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}}$ *R.:* $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$
53. $\sqrt{a^2 + b + 2a\sqrt{b}}$ *R.:* $a + \sqrt{b}$

● Resolver as equações irracionais:

54. $\sqrt{3x - 2} - 7 = 0$ *R.:* 17
55. $3 + \sqrt{x - 1} = x$ *R.:* 5
56. $x - \sqrt{x} = 2$ *R.:* 4
57. $x + \sqrt{6 - x} = 0$ *R.:* −3
58. $\sqrt{x + 1} = 3$ *R.:* 8
59. $\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = 5$ *R.:* 4
60. $\sqrt{x - 5} = x - 7$ *R.:* 9
61. $x + \sqrt{x} = 20$ *R.:* 16
62. $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{3x + 1} = 7$ *R.:* 5
63. $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}} = 2$ *R.:* 1
64. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{3x - 3} = 1$ *R.:* 4
65. $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{5x - 1} = 5$ *R.:* 2
66. $\dfrac{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2}} = 3$ *R.:* 10/3
67. $(x+9)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = (x - 15)^{\frac{1}{2}}$ *R.:* 16
68. $6 + \sqrt{3x^2 + 1} = 2x^2$ *R.:* $\pm \sqrt{5}$
69. $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 6$ *R.:* 81
70. $\dfrac{\sqrt{3x + 1} + \sqrt{3x}}{\sqrt{3x + 1} - \sqrt{3x}} = 2$ *R.:* $\frac{1}{24}$

71. $\sqrt{(x - 2)(x - 3)} + 5\sqrt{\frac{x - 2}{x - 3}} = \sqrt{x^2 + 6x + 8}$ *Resp.:* 8
72. $3\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} = 12$ *Resp.:* 81
73. $\sqrt{\frac{5x + 2}{x - 2}} + \sqrt{\frac{x - 2}{5x + 2}} = \frac{10}{3}$ *Resp.:* 5 e $-\frac{5}{11}$
74. $3x^{\frac{2}{3}} + 2 = 5x^{\frac{1}{3}}$ *Resp.:* $x = 1$ e $x = \frac{8}{27}$
75. $\sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{a^2 - 1}{a}$ *Resp.:* $\frac{1}{a}$
76. $\dfrac{5 + \sqrt{3x^2 - 2}}{\sqrt{3x^2 - 2}} = \sqrt{3x^2 - 2} - 3$ *Resp.:* $x = \pm 3$
77. $33 + \sqrt{5x^2 - 2x - 3} = 5x^2 - 2x$ *Resp.:* 3 e $-\frac{13}{5}$

● Resolver os sistemas:

78. $\begin{cases} x - y = 16 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$ *R.:* 25 e 9

79. $\begin{cases} x - y = 35 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7 \end{cases}$ *R.:* 36 e 1

80. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{xy} = 6 \end{cases}$ *R.:* 4 e 9

81. $\begin{cases} 2\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 5 \\ \sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = 5 \end{cases}$ *R.:* 5 e 4

82. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \\ \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} = \frac{5}{6} \end{cases}$ *R.:* 9 e 4

83. $\begin{cases} x + y = 34 \\ \sqrt{xy} = 15 \end{cases}$ *R.:* 25 e 9

Respostas de 1 a 42:

1) ± 5; ± 2
2) ± 5; ± 3
3) ± 3; ± 2
4) $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{3}$
5) ± 3
6) $\pm \sqrt{2}$; ± 1
7) ± 1; $\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$
8) $\pm \sqrt{5}$
9) ± 2; $\pm \frac{1}{2}$
10) ± 1; $\pm \sqrt{\frac{2}{5}}$
11) $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$
12) $\pm (a+1)$; $\pm (a-1)$
13) $\pm \sqrt{\frac{1}{7}}$; $\pm \sqrt{3}$
14) ± 2
15) $\pm \sqrt{3}$; $\pm \sqrt{2}$
16) ± 3
17) Imp.
18) ± 2
19) $\pm \sqrt{a}$; $\pm \sqrt{b}$
20) ± 3
21) $\pm \sqrt{\frac{7}{6}}$; $\pm \frac{1}{2}$

22) $0;\quad \pm\sqrt{3}$
23) $\pm(a+b);\quad \pm(a-b)$
24) $\pm(a-b)$
25) $\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
26) $\pm 2a;\quad \pm a$
27) $36x^4-13x^2+1=0$
28) $x^4-14x^2+25=0$
29) $x^4-14x^2+45=0$
30) $x^4-5x^2+6=0$
31) $x^4-49x^2=0$
32) $x^4-2x^2=0$
33) $x^4-106x^2+2\ 025=0$
34) $x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2=0$
35) $x^4-(m+n)x^2+mn=0$
36) $x^4-ax^2=0$
37) 0
38) 0
39) 4
40) 0
41) 2
42) 4

UNIDADE II

GEOMETRIA

Relações métricas nos polígonos e no círculo
Cálculo de π

I. Relações métricas no triângulo retângulo.

II. Relações métricas no triângulo qualquer. Relação dos co-senos.

III. Cálculo das medianas, das alturas e das bissetrizes de um triângulo.

IV. Relações métricas no círculo.

V. Polígonos inscritíveis e circunscritíveis. Teorema de Hiparco. Teorema de Pitot.

VI. Polígonos regulares. Propriedades. Quadrado, hexágono, triângulo e decágono convexos.

VII. Medição da circunferência. Cálculo de π.

I. Relações métricas no triângulo retângulo

1. Definições. Chama-se ***projeção*** de um ponto sôbre uma reta, o pé da perpendicular traçada do ponto à reta. Assim, na figura 2, a projeção do ponto A sôbre a reta XX' é A'.

Projeção de um *segmento* AB sôbre uma reta, é o segmento determinado pelas projeções dos extremos do segmento dado sôbre a mesma reta. Assim, a projeção do segmento AB (fig. 2) é $A'B'$, e a projeção de CD é CD'.

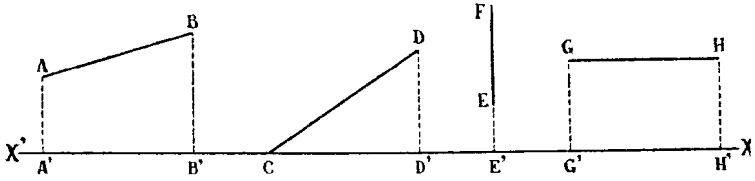


FIG. 2

Quando o segmento é paralelo à reta, como GH na figura 2, a projeção $G'H'$ lhe é igual (lados opostos de um retângulo).

Quando o segmento é perpendicular à reta, como EF na figura 2, a projeção se reduz a um ponto e é, portanto, nula.

Chama-se *relação métrica* no triângulo uma relação qualquer entre os números que representam as medidas, expressas na mesma unidade, dos elementos lineares do triângulo.

2. Relações métricas no triângulo retângulo.

1.ª **A hipotenusa é a soma das projeções dos catetos sôbre ela.**

Seja o triângulo retângulo BAC (fig. 3).

Tracemos a perpendicular AH sôbre a hipotenusa; m e n serão, respectivamente, as projeções dos catetos b e c.

Na figura 3, temos, então, imediatamente:

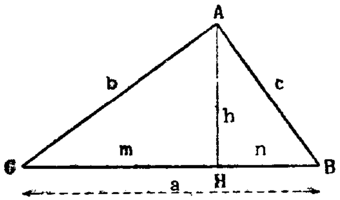


FIG. 3

$$\boxed{m + n = a} \qquad (1)$$

2.ª **Qualquer cateto é média proporcional entre a hipotenusa e sua projeção sôbre ela.**

Temos, na mesma figura 3:

Hip.: $A = 90°$ Tese: $\begin{cases} b^2 = am \\ c^2 = an \end{cases}$

Demonstração.

a) Os triângulos AHC e BAC são semelhantes por terem o ângulo agudo C comum. Dessa semelhança conclui-se:

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b} \therefore \boxed{b^2 = am} \qquad (2)$$

b) Os triângulos retângulos AHB e BAC são semelhantes por terem o ângulo agudo B comum. Conclui-se:

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c} \therefore \boxed{c^2 = an} \qquad (3)$$

3.ª **A altura traçada sôbre a hipotenusa é média proporcional entre as projeções dos catetos sôbre a hipotenusa.**

Tese: $h^2 = mn$ (fig. 3)

Demonstração. Os ângulos $\widehat{HAC}$ e $\hat{B}$ são iguais por terem o mesmo complemento C. Logo, podemos concluir:

$$\triangle AHC \sim \triangle AHB$$

Dessa semelhança resulta:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \therefore \boxed{h^2 = mn} \qquad (4)$$

4.ª **Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.**

Demonstração. Somando, membro a membro, as equações (2) e (3), obtemos:

$$b^2 + c^2 = am + an$$

fatorando o segundo membro, resulta:

$$b^2 + c^2 = a(m + n),$$

substituindo $m + n$ por seu valor a:

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2} \qquad (5)$$

5.ª **O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura.**

Demonstração. Multiplicando, membro a membro, as equações (2) e (3), dadas pela segunda relação, obtemos:

$$b^2c^2 = a^2mn$$

ou, em virtude de (4):

$$b^2c^2 = a^2h^2$$

extraindo a raiz, resulta:

$$\boxed{bc = ah} \qquad (6)$$

3. Problemas. As relações métricas se aplicam à resolução dos problemas que consistem em calcular os elementos lineares de um triângulo retângulo. De um modo geral os problemas são resolvidos por um dos sistemas de equações:

$$\text{I}\begin{cases} m+n=a \\ b^2=am \\ c^2=an \\ h^2=mn \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} b^2+c^2=a^2 \\ bc=ah \end{cases}$$

formados pela reunião das relações métricas. O segundo é conseqüência do primeiro. Êste será utilizado, quando uma das projeções ou ambas forem dadas; o segundo, quando nenhuma delas fôr dada, utilizando-se as duas primeiras equações do sistema I para achar as projeções, se estas forem pedidas.

Os problemas são de três tipos.

PRIMEIRO TIPO. ***São dados dois elementos do triângulo.***

Exemplos:

1.º) *A hipotenusa de um triângulo retângulo tem* 25*dm e a altura* 12*dm. Calcular os outros elementos.*

Resolução. Considerando o sistema II e substituindo os elementos dados por seus valores, obtemos:

$$b^2+c^2=625$$
$$bc=300$$

Multiplicando a segunda equação por 2 e adicionando o resultado à primeira, resulta:

$$b^2+2bc+c^2=1225,$$

donde concluímos: $b+c=35$

Temos, assim, a soma e o produto dos catetos, que são portanto as raízes da equação:

$$x^2-35x+300=0.$$

Resolvendo-a, temos:

$$x=\frac{35\pm\sqrt{1\,225-1\,200}}{2}=\frac{35\pm5}{2}$$

Supondo b o maior cateto, obtemos:

$$b=\frac{35+5}{2}=20$$

$$c=\frac{35-5}{2}=15.$$

As projeções serão determinadas pelas equações:

$$b^2=am \text{ ou } 400=25m\;\therefore\; m=\frac{400}{25}=16$$

$$c^2=an \text{ ou } 225=25n\;\therefore\; n=\frac{225}{25}=9$$

Resp.: $b=20,\ c=15,\ m=16,\ n=9.$

2.º) *Calcular os elementos lineares de um triângulo retângulo, sabendo que o cateto* b *tem* 12*m e a projeção do outro cateto sôbre a hipotenusa tem* 5,4*m.*

Resolução. Considerando o sistema I e substituindo os elementos dados por seus valores, obtemos:

$$\begin{cases} 144=am \\ c^2=5{,}4a \\ m+5{,}4=a\;\therefore\; m=a-5{,}4 \\ h^2=5{,}4m \end{cases}$$

Substituindo o valor de m na primeira equação, resulta:

$$a^2-5{,}4a=144 \text{ ou } a^2-5{,}4a-144=0$$

calculando a raiz positiva, temos:

$$a=2{,}7+\sqrt{7{,}29+144}=2{,}7+\sqrt{151{,}29}=2{,}7+12{,}3$$

donde: $a=15.$

Substituindo a hipotenusa por seu valor nas equações do sistema, temos:

$$\begin{cases} 144 = 15m \therefore m = \dfrac{144}{15} = 9{,}6 \\ c^2 = 5{,}4 \times 15 = 81 \quad \therefore c = 9 \\ h^2 = 5{,}4 \times 9{,}6 = 51{,}84 \therefore h = 7{,}2 \end{cases}$$

SEGUNDO TIPO. ***São dados um elemento e uma equação.***

Exemplo. *Calcular os lados de um triângulo retângulo conhecendo a altura 4,8m e a soma 14m dos catetos.*

Resolução. O enunciado fornece a equação: $b + c = 14$.

Reunindo essa equação às do sistema II, resulta o sistema de três incógnitas:

$$\begin{cases} b + c = 14 \\ b^2 + c^2 = a^2 \\ bc = 4{,}8a \end{cases}$$

Elevando a primeira equação ao quadrado, obtemos:

$$b^2 + c^2 + 2bc = 196,$$

fazendo as substituições indicadas nas duas últimas equações:

$$a^2 + 2 \times 4{,}8a = 196$$

ou, $$a^2 + 9{,}6a - 196 = 0.$$

Calculando a raiz positiva da última equação, temos:

$$a = -4{,}8 + \sqrt{23{,}04 + 196} = -4{,}8 + \sqrt{219{,}04}$$

donde: $$a = -4{,}8 + 14{,}8 = 10$$

Substituindo o valor de a na primeira e terceira equações do sistema, concluímos:

$$\begin{cases} b + c = 14 \\ cb = 48. \end{cases}$$

Assim, b e c são raízes da equação $x^2 - 14x + 48 = 0$ e seus valores serão, considerando b o maior cateto:

$$\begin{cases} b = 8 \\ c = 6. \end{cases}$$

Resp.: $a = 10$m; $b = 8$m; $c = 6$m

TERCEIRO TIPO. ***O enunciado fornece duas equações e nenhum elemento é dado.***

Exemplo. *Calcular os lados e a altura de um triângulo retângulo conhecendo o perímetro 12m e a soma 50m dos quadrados dos lados.*

Resolução. Temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 12 & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 50 & (2) \\ b^2 + c^2 = a^2 & (3) \\ bc = ah & (4) \end{cases}$$

Substituindo em (2) a soma $b^2 + c^2$ pelo valor (3):

$$2a^2 = 50 \therefore a^2 = 25 \therefore a = 5$$

Substituindo o valor de a em (1) e (3):

$$\begin{cases} b + c = 7 \\ b^2 + c^2 = 25. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $b = 4$ e $c = 3$.

Substituindo os valores de a, b e c em (4):

$$12 = 5h \therefore h = 2{,}4$$

Resultado: $a = 5$m, $b = 4$m; $c = 3$m; $h = 2{,}4$m

4. Aplicações do teorema de Pitágoras.

1.ª) ***Altura do triângulo eqüilátero.*** Suponhamos o triângulo eqüilátero ABC (fig. 4) e tracemos a altura AD, que é também mediana. Logo, temos:

$$BD = DC = \frac{l}{2}.$$

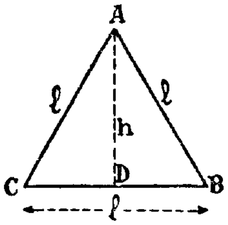


FIG. 4

Considerando o triângulo retângulo ADC, teremos, de acôrdo com o teorema de Pitágoras:

$$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \text{ ou } h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$

donde, finalmente, a fórmula:

$$\boxed{h = \frac{l\sqrt{3}}{2}}$$

OBSERVAÇÃO. A mesma fórmula aplica-se ao cálculo da mediana e da bissetriz.

2.ª) ***Diagonal do quadrado.*** Consideremos o quadrado $ABCD$ e tracemos a diagonal AC (fig. 5).

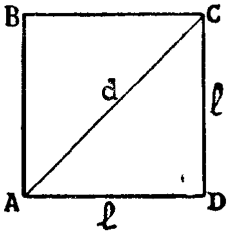


FIG. 5

O triângulo retângulo ACD, permite concluir:

$$d^2 = l^2 + l^2, \text{ ou } d^2 = 2l^2$$

donde, finalmente:

$$\boxed{d = l\sqrt{2}}$$

EXERCÍCIOS

1. Os catetos de um triângulo retângulo medem respectivamente 18cm e 24cm. Calcular a hipotenusa e a altura que lhe é relativa. *Resp.:* 30cm e 14,4cm
2. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem 15cm e um dos catetos 12cm. Calcular o outro cateto. *Resp.:* 9cm

3. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20cm e a projeção de um dos catetos, 4cm. Calcular a altura relativa à hipotenusa. *Resp.:* 8cm
4. Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede 6cm e um dos segmentos que determina na hipotenusa mede 4cm. Calcular a hipotenusa. *Resp.:* 13cm
5. Num triângulo retângulo um dos catetos mede 6cm e sua projeção sôbre a hipotenusa mede 4cm. Calcular a hipotenusa. *Resp.:* 9cm
6. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 30cm e a projeção de um dos catetos sôbre ela vale $\frac{4}{5}$ daquêle comprimento. Calcular a altura relativa à hipotenusa. *Resp.:* 12cm
7. Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo em que um dos catetos mede 20cm e o outro vale 3/4 do primeiro. *Resp.:* 25cm
8. A soma dos catetos de um triângulo retângulo vale 21m e a hipotenusa tem 15m. Calcular os catetos. *Resp.:* 9m e 12m
9. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem 26m e a razão entre os catetos é 5/12. Calcular os catetos. *Resp.:* 10m e 24m
10. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem 13m e a diferença entre os catetos é de 7m. Calcular os catetos. *Resp.:* 5m e 12m
11. O perímetro de um triângulo retângulo tem 30m e a hipotenusa, 13m. Calcular os catetos. *Resp.:* 5m e 12m
12. A soma dos catetos que são proporcionais aos números 3 e 4, é 28m. Calcular a hipotenusa. *Resp.:* 20m
13. A hipotenusa de um triângulo retângulo tem 25m e a altura, 12m. Calcular os catetos. *Resp.:* 15m e 20m
14. Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo em que um dos catetos tem 6m e sua projeção sôbre a hipotenusa, 3,6m. *Resp.:* 10m
15. As projeções dos catetos de um triângulo retângulo sôbre a hipotenusa medem, respectivamente, 9dm e 16dm. Calcular os catetos. *Resp.:* 15dm e 20dm
16. A diferença entre os catetos de um triângulo é de 7dm e o perímetro tem 30dm. Calcular os catetos. *Resp.:* 5dm e 12dm
17. As projeções dos catetos sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo medem respectivamente 0,3m e 4,5m. Calcular os catetos. *Resp.:* 1,2m e 4,6
18. Na figura 3, o $\triangle ABC$ é retângulo ($\hat{A} = 90°$) e são dados: $a = 25$cm e $b = 7$cm. Calcular c, h, m, n. *Resp.:* 24cm, 6,72cm, 1,96cm e 23,04cm

(OBSERVAÇÃO. As respostas dos exercícios de 18 a 26 são dadas na ordem a, b, c, h, m, n).

19. Na mesma figura são dados: $a = 10$m e $h = 4,8$m.
Resp.: 8m, 6m, 6,4m e 3,6m
20. Na mesma figura tem-se: $a = 5$dm e $m = 1,8$dm.
Resp.: 3dm, 4dm, 2,4dm e 3,2dm
21. Na mesma figura tem-se: $b = 16$m, $c = 12$m.
Resp.: 20m, 9,6m, 12,8m, 7,2m
22. Na mesma figura tem-se: $b = 20$m, $h = 12$m.
Resp.: 25m, 15m, 16m, 9m
23. Na mesma figura tem-se: $b = 12$dm, $m = 9,6$dm (proj. de b).
Resp.: 15dm, 9dm, 7,2dm, 5,4dm
24. Na mesma figura tem-se: $b = 3$dm, $n = 3,2$dm (proj. de c).
Resp.: 5dm, 4dm, 2,4dm, 1,8dm
25. Na mesma figura tem-se: $h = 7,2$dm, $m = 9,6$dm.
Resp.: 15dm, 12dm, 9dm, 5,4dm
26. Na mesma figura tem-se: $m = 3,2$dm, $n = 1,8$dm.
Resp.: 5dm, 4dm, 3dm, 2,4dm
27. Calcular o lado de um quadrado, cuja diagonal tem 3cm mais que o lado. *Resp.:* 7,2cm.
28. Calcular a altura de um triângulo eqüilátero, cujo lado tem 14cm.
Resp.: 12,1cm
29. Calcular os lados de um triângulo retângulo, cujo perímetro tem 12m e a altura relativa à hipotenusa 2,4m. *Resp.:* 5m, 4m e 3m
30. A soma dos lados de um triângulo retângulo é 24m e a soma dos quadrados dos mesmos 200m². Calcular os lados. *Resp.:* 10m, 8m e 6m
31. A hipotenusa de um triângulo tem 40m e a relação entre as projeções dos catetos sôbre ela é de 9/16. Calcular os outros elementos.
Resp.: 32m, 24m, 19,2m, 25,6m, 14,4m
32. As diferenças entre a hipotenusa e cada um dos catetos são respectivamente 8m e 1m. Calcular os lados. *Resp.:* 13m, 5m, 12m
33. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20cm e um dos catetos vale 3/4 do outro. Calcular os catetos e a altura. *Resp.:* 12, 16 e 9,6cm
34. Calcular o raio de uma circunferência, onde uma corda de 8cm dista 3cm do centro. *Resp.:* 5cm
35. Os raios de duas circunferências concêntricas medem respectivamente 15cm e 12cm. Calcular a corda da circunferência maior tangente à menor. *Resp.:* 18cm
36. O perímetro de um quadrado tem 16m. Calcular a diagonal.
Resp.: 5,64m
37. Num retângulo $ABCD$ traça-se a diagonal BD e baixa-se sôbre ela a perpendicular traçada do vértice A. A perpendicular divide a diagonal em segmentos de 6,4cm e 3,6cm. Calcular os lados do retângulo.
Resp.: 6cm e 8cm

38. O perímetro de um losango tem 24cm e a diagonal menor é igual ao lado. Calcular a diagonal maior. *Resp.:* 10,38cm
39. O perímetro de um losango tem 104cm e uma das diagonais é 5/12 da outra. Calcular as diagonais. *Resp.:* 20cm e 48cm
40. Os raios de duas circunferências medem, respectivamente, 11cm e 3cm e a distância dos centros é de 17cm. Calcular o segmento da tangente comum externa às mesmas circunferências. *Resp.:* 15cm
41. Os raios de duas circunferências medem 4cm e 8cm, respectivamente, e a distância dos centros, 15cm. Calcular o segmento da tangente comum interna. *Resp.:* 9cm
42. As bases de um trapézio isósceles medem 2m e 5,2m e a diagonal, 6m. Calcular a altura. *Resp.:* 4,8m
43. Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujo perímetro tem 36m, medindo os catetos de um triângulo que lhe é semelhante 6m e 8m, respectivamente. *Resp.:* 15m
44. Os raios de duas circunferências têm respectivamente 7cm e 2cm, e a distância dos centros tem 15cm. Dizer a posição relativa dos dois círculos e calcular a tangente comum externa.
Resp.: exteriores, 14,14cm
45. Num círculo de 1m de raio, calcular a distância do centro a uma corda de 16dm. *Resp.:* 6dm
46. Calcular a altura de um trapézio isósceles cujas bases medem respectivamente 61m e 59m e uma das diagonais 61m. *Resp.:* 11m
47. Os catetos de um triângulo retângulo medem 12cm e 9cm. Calcular os segmentos aditivos que a bissetriz do ângulo reto determina na hipotenusa. *Resp.:* 8,57cm e 6,42cm
48. De um ponto situado a 10m do centro de um círculo traça-se uma tangente que mede 6m. Calcular o raio. *Resp.:* 8m
49. O lado de um triângulo eqüilátero excede a altura de 1cm. Calcular o lado. *Resp.:* 7,4cm
50. Os lados de um retângulo medem 6cm e 8cm. Calcular os lados de um retângulo semelhante cuja diagonal mede 3cm.
Resp.: 1,8cm e 2,4cm

II. Relações métricas num triângulo qualquer.

5. Primeira relação:

> **O quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o duplo produto de um dêsses dois pela projeção do outro sôbre êle.**

Seja o triângulo ABC (fig. 6).

Hip.: $\hat{A} < 90°$;

Tese: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$.

Demonstração. O triângulo retângulo BDC fornece a relação:

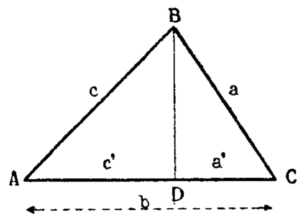


FIG. 6

$$a^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

Substituindo DC por $b - c'$, resulta:

$$a^2 = \overline{BD}^2 + b^2 - 2bc' + c'^2$$

Como $\overline{BD}^2 + c'^2 = c^2$, por ser retângulo o triângulo ABD, concluímos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'} \qquad (1)$$

6. Segunda relação:

> **O quadrado do lado oposto a um ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados dos outros dois, mais o duplo produto de um dêsses dois pela projeção do outro sôbre êle.**

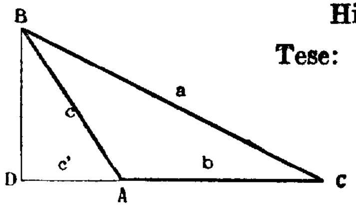


Fig. 7

Hip.: $\hat{A} > 90°$;

Tese: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$

Demonstração. Considerando o triângulo retângulo BDC (fig. 7), temos:

$$a^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$$

Substituindo DC por $c' + b$, resulta:

$$a^2 = \overline{BD}^2 + c'^2 + 2bc' + b^2.$$

Como $\overline{BD}^2 + c'^2 = c^2$, concluímos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'} \qquad (2)$$

Aplicações:

I) ***Dados os três lados de um triângulo, verificar se o mesmo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo.***

Das duas relações e do teorema de Pitágoras, decorrem as conclusões:

Se $\hat{A} < 90°$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'$ $\therefore$ $\boxed{a^2 < b^2 + c^2}$

Se $\hat{A} > 90°$, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc'$ $\therefore$ $\boxed{a^2 > b^2 + c^2}$

Se $\hat{A} = 90°$, conclui-se: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Como tôdas as hipóteses possíveis estão consideradas, podemos assegurar que a recíproca é verdadeira. Assim, dado um triângulo, cujos lados sejam, em ordem de grandeza:

$$a > b > c$$

podemos afirmar imediatamente que os dois ângulos menores B e C são agudos e, para determinar a natureza do terceiro,

e, portanto, a do triângulo, comparamos o quadrado do maior lado com a soma dos quadrados dos dois outros.

Exemplos:

1.°) *O triângulo de lados 25m, 20m e 15m é retângulo porque* $625 = 400 + 225$.

2.°) *O triângulo de lados 6m, 8m e 9m é acutângulo porque* $81 < 36 + 64$.

3.°) *O triângulo de lados 5m, 3m e 7m é obtusângulo porque* $49 > 25 + 9$.

II) ***Calcular a projeção de um lado sôbre outro.***

Seja um triângulo com lados de 5m, 11m e 7m respectivamente e determinemos as projeções do primeiro sôbre cada um dos outros dois.

Como o lado de 7m está necessàriamente oposto a ângulo agudo, temos a equação, onde p é a projeção do primeiro sôbre o segundo.

$$7^2 = 11^2 + 5^2 - 22p \text{ ou } 49 = 121 + 25 - 22p,$$

donde: $$p = \frac{146 - 49}{22} = 4{,}41\text{m (aproximadamente)}.$$

O lado de 11m está oposto a ângulo obtuso porque

$$11^2 > 5^2 + 7^2,$$

logo: $$11^2 = 5^2 + 7^2 + 2 \times 7p',$$

sendo p' a projeção do primeiro lado sôbre o terceiro.

Resolvendo a equação, obtemos:

$$p' = \frac{121 - 25 - 49}{14} = \frac{47}{14} = 3{,}36\text{m (aproximadamente)}.$$

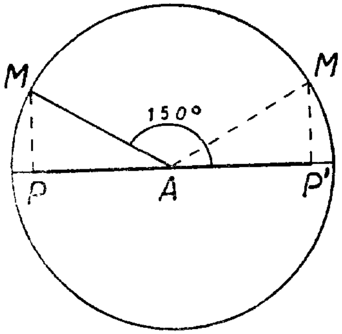


FIG. 8

7. Terceira relação: relação dos co-senos.

a) Co-seno de um ângulo obtuso. Consideremos um ângulo A de 150° (fig. 8) e tracemos o círculo de centro A e raio igual a unidade.

Chama-se co-seno do ângulo a projeção AP do raio AM sôbre a reta PP', isto é:

$$\cos 150° = \overline{AP}.$$

Se traçarmos o ângulo suplementar (30°), podemos concluir que os triângulos retângulos AMP e $AM'P'$ são congruentes e, portanto:

$$\overline{AP} = \overline{AP'}$$

Convenciona-se distinguir as posições de P' e P, à direita e à esquerda de A, considerando positivos os segmentos de A para direita e negativos os de A para esquerda, como indica a figura 8.

Para obter o co-seno de um ângulo obtuso, procuraremos, então, na tábua o co-seno do suplemento e o afetamos do sinal −.

Para o nosso exemplo, teremos, utilizando a tábua de co-senos:

$$\cos 30° = 0{,}8660$$

logo,

$$\cos 150° = -0{,}8660.$$

De um modo geral, conclui-se: *dois ângulos suplementares têm co-senos simétricos*, relação que é traduzida pela igualdade:

$$\cos(180 - a) = -\cos a.$$

b) Relação dos co-senos. Com esta convenção, na figura 6 o triângulo ABD dá:

$$c' = c \,.\, \cos \hat{A}$$

e substituindo êsse valor na primeira relação, teremos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A}} \qquad (3)$$

Anàlogamente, na figura 7 teremos, considerando o triângulo ABD:

$$c' = c. \ \cos BAD = c. \ \cos(180 - \hat{A}) = -c.\cos \hat{A}$$

e substituindo c' na segunda relação:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \hat{A}}$$

Observamos assim, que a relação é a mesma quer o ângulo oposto ao lado seja agudo ou obtuso, isto é:

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, menos o duplo produto dêsses dois pelo co-seno do ângulo por êles formado.

Exemplo: *Os lados desiguais de um paralelogramo medem respectivamente* 4cm *e* 6cm *e formam um ângulo de* 60°. *Calcular as diagonais.*

Resolução.

1.ª) No triângulo ACD (fig. 9), temos:

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \cos 60°$$

ou

$$\overline{AC}^2 = 16 + 36 - 48 \times 0{,}5 = 52 - 24$$

donde

$$\overline{AC}^2 = 28 \text{ e } AC = \sqrt{28} = 5{,}3\text{cm}.$$

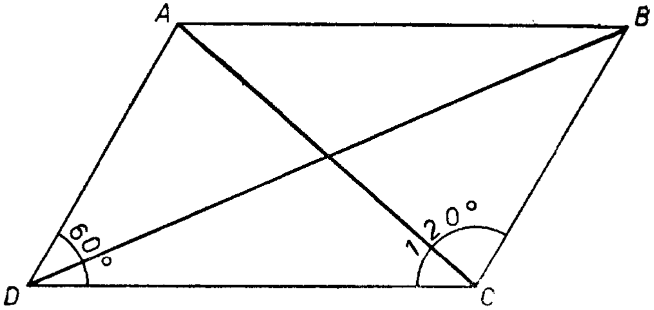


FIG. 9

2.ª) No triângulo BDC (fig. 9), temos:

$$\overline{BD}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \cdot \cos 120°$$

ou $\overline{BD}^2 = 16 + 36 - 48(-0{,}5) = 52 + 24$

donde $\overline{BD}^2 = 76$ e $\overline{BD} = \sqrt{76} = 8{,}7\text{cm}.$

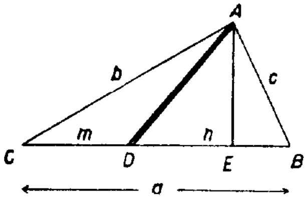


FIG. 10

8. Quarta relação: teorema de Stewart. Seja o triângulo ABC (fig. 10). Tracemos o segmento interior AD que dividirá o lado a em dois segmentos m e n. Tem-se a relação:

$$\boxed{\frac{b^2}{am} - \frac{\overline{AD}^2}{mn} + \frac{c^2}{an} = 1}$$

É fácil escrever a relação, observando que o numerador de cada fração é o quadrado de um raio do feixe concorrente em A, e o denominador correspondente é o produto dos segmentos que o mesmo raio determina no lado a; ao raio intermediário corresponde um têrmo negativo.

Demonstração. Aplicando as duas primeiras relações aos triângulos ADB e ADC, obtemos as equações:

$$\begin{array}{l|l} c^2 = \overline{AD}^2 + n^2 - 2n \cdot \overline{DE} & m \\ b^2 = \overline{AD}^2 + m^2 + 2m \cdot \overline{DE} & n. \end{array}$$

Eliminando DE pelo processo de adição, resulta:

$$c^2m = \overline{AD}^2m + mn^2 - 2mn \times DE$$
$$b^2n = \overline{AD}^2n + m^2n + 2mn \times \overline{DE}$$

Somando, membro a membro, vem:

$$b^2n + c^2m = \overline{AD}^2(m + n) + mn(m + n)$$

Substituindo $m + n$ por a (fig. 10):

$$b^2n + c^2m = a\overline{AD}^2 + amn.$$

Transpondo o têrmo $a\overline{AD}^2$ e dividindo os dois membros por amn, resulta finalmente:

$$\frac{b^2}{am} - \frac{\overline{AD}^2}{mn} + \frac{c^2}{an} = 1$$

III. Cálculo das medianas, das alturas e das bissetrizes de um triângulo

9. Cálculo das alturas. Seja o triângulo ABC e h a altura traçada sôbre o lado a. Em qualquer das figuras, o ângulo B é agudo e os triângulos AHB e ABC fornecem as equações (fig. 11):

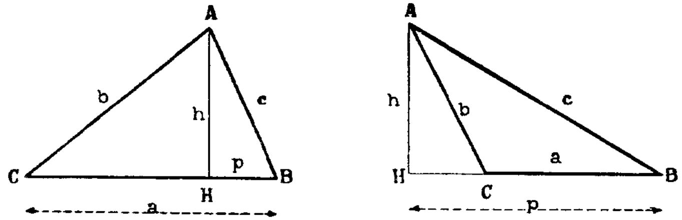


FIG. 11

$$\begin{cases} h^2 = c^2 - p^2 \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ap. \end{cases}$$

Resolvendo a segunda equação em relação a p:

$$p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Substituindo na primeira:

$$h^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

Decompondo a diferença entre os quadrados:

$$h^2 = \frac{(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)}{4a^2}$$

ou $$h^2 = \frac{[(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]}{4a^2}$$

Decompondo os dois colchêtes:

$$h^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2} \qquad (1)$$

Por outro lado, temos:

$$a + b + c = 2p$$

e subtraindo $2a$: $b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a)$

subtraindo $2b$: $a + c - b = 2p - 2b = 2(p - b)$

subtraindo $2c$: $a + b - c = 2p - 2c = 2(p - c)$

Substituindo êstes valores em (1):

$$h^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4a^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}$$

Extraindo a raiz quadrada dos dois membros, obtemos finalmente a fórmula da altura traçada sôbre o lado a:

$$\boxed{h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Anàlogamente teremos as expressões de h_b e h_c.

Exemplo: *Num triângulo, cujos lados medem respectivamente 10m, 17m e 9m, calcular a altura traçada sôbre o primeiro lado.*

Temos : $2p = 10 + 17 + 9 = 36 \therefore p = 18.$

Aplicando a fórmula:

$$h = \frac{2}{10}\sqrt{18\times8\times1\times9} = \frac{2}{10}\sqrt{2^4\times3^4} = \frac{2}{10}\times 36 = 7{,}2$$

10. Cálculo das medianas. Se AD fôr a mediana traçada sôbre o lado a (fig. 10), teremos:

$$m = n = \frac{a}{2}.$$

Substituindo os valores de m e n na relação de Stewart, resulta:

$$\frac{b^2}{\frac{a^2}{2}} - \frac{\overline{AD}^2}{\frac{a^2}{4}} + \frac{c^2}{\frac{a^2}{2}} = 1$$

ou

$$\frac{2b^2}{a^2} - \frac{4\overline{AD}^2}{a^2} + \frac{2c^2}{a^2} = 1$$

eliminando os denominadores, resulta:

$$2b^2 - 4\overline{AD}^2 + 2c^2 = a^2$$

isolando o têrmo $4\overline{AD}^2$:

$$4\overline{AD}^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

extraindo a raiz quadrada:

$$2AD = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

donde, finalmente, a fórmula, sendo AD ou m_a a mediana

$$\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$$

Anàlogamente teremos as medianas dos lados b e c.

Exemplo. *Calcular a mediana traçada sôbre o maior lado do triângulo de lados 11m, 13m e 16m.*

Sendo $a = 16,\ b = 11,\ c = 13,$ temos:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\times121 + 2\times169 - 256} = \frac{1}{2}\sqrt{324} = 9.$$

Observações.

1.ª) Se o triângulo fôr retângulo, teremos:

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

e, portanto,

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - a^2} = \frac{a}{2}$$

isto é, *a mediana traçada sôbre a hipotenusa é igual à metade desta.*

2.ª) Se o triângulo fôr eqüilátero a mediana é ao mesmo tempo altura e bissetriz, resultando:

$$m = h = \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2}$$

donde a fórmula: $\boxed{m = h = \beta = \frac{a}{2}\sqrt{3}}$

onde m, h e β são, respectivamente, mediana, altura e bissetriz.

11. Cálculo das bissetrizes internas. Eliminando os denominadores da relação de Stewart, obtemos:

$$b^2n - a\overline{AD}^2 + c^2m = amn \qquad (1)$$

Se AD fôr bissetriz, os segmentos m e n serão proporcionais aos lados (fig. 10), isto é,

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c} \quad \text{donde} \quad \frac{m+n}{b+c} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$$

como $m + n$ é igual a a, concluímos:

$$m = \frac{ab}{b+c} \quad \text{e} \quad n = \frac{ac}{b+c}$$

Substituindo os valores em (1) e representando a bissetriz por β teremos: $\dfrac{ab^2c}{b+c} - a\beta^2 + \dfrac{abc^2}{b+c} = \dfrac{a^3bc}{(b+c)^2}$.

Simplificando o fator a e somando as frações do primeiro membro, resulta:

$$\frac{bc(b+c)}{b+c} - \beta^2 = \frac{a^2bc}{(b+c)^2}.$$

Simplificando a primeira fração e transpondo os têrmos:

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \beta^2$$

ou $$\beta^2 = bc\left[1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right] = bc \times \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2},$$

decompondo a diferença entre quadrados:

$$\beta^2 = bc \times \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc \times 2p \times 2\,(p-a)}{(b+c)^2}$$

Extraindo a raiz quadrada, temos finalmente a fórmula:

$$\boxed{\beta = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}}$$

12. Cálculo das bissetrizes externas. Seja o triângulo ABC e AD a bissetriz externa, traçada sôbre o lado a, a qual

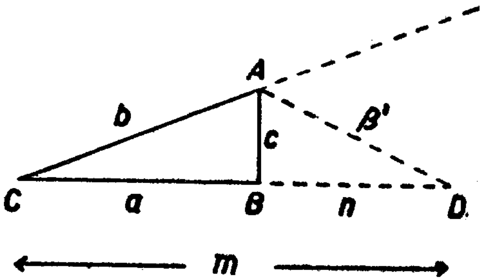


FIG. 12

representaremos por β' (fig. 12). Aplicando a relação de Stewart ao triângulo ACD, obteremos a equação:

$$\frac{b^2}{am} - \frac{c^2}{an} + \frac{\beta'^2}{mn} = 1.$$

Eliminando os denominadores, resulta:

$$b^2n - c^2m + a\beta'^2 = amn \qquad (1)$$

Em virtude da propriedade da bissetriz externa, temos:

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{c} \quad \text{donde} \quad \frac{m-n}{b-c} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

Substituindo $m - n$ por a (fig. 12), resulta:

$$m = \frac{ab}{b-c} \text{ e } n = \frac{ac}{b-c}.$$

Substituindo os valores de m e n em (1):

$$\frac{ab^2c}{b-c} - \frac{abc^2}{b-c} + a\beta'^2 = \frac{a^3bc}{(b-c)^2}.$$

Efetuando as transformações análogas ao caso da bissetriz interna, obteremos sucessivamente:

$$\frac{bc\,(b-c)}{b-c} + \beta'^2 = \frac{a^2bc}{(b-c)^2}$$

$$bc + \beta'^2 = \frac{a^2bc}{(b-c)^2}$$

$$\therefore\ \beta'^2 = bc\left[\frac{a^2}{(b-c)^2}-1\right] = bc \times \frac{a^2-(b-c)^2}{(b-c)^2}$$

$$\beta'^2 = bc\times\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{(b-c)^2} = \frac{bc\times 2\,(p-b)\times 2(p-c)}{(b-c)^2}$$

donde, finalmente, a fórmula:

$$\boxed{\beta' = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)\,(p-c)}}$$

EXERCÍCIOS

● *Resolver os problemas*:

1. Determinar a natureza, quanto aos ângulos, de um triângulo, cujos lados medem respectivamente 11, 13 e 20 metros. *Resp.:* obtusângulo.
2. Determinar a natureza, quanto aos ângulos, de um triângulo, cujos lados medem respectivamente 5, 12 e 13 m. *Resp.:* retângulo.
3. Determinar a natureza, quanto aos ângulos, de um triângulo, cujos lados medem, respectivamente, 6m, 7m e 9m. *Resp.:* acutângulo.
4. A base de um triângulo tem 5m e os dois outros lados têm respectivamente 7m e 4m. Calcular as projeções dêsses dois últimos lados sôbre a base. *Resp.:* 5,8m e 0,8m
5. Calcular a projeção do lado a sôbre o lado b do $\triangle\, ABC$, sendo $a=6$cm, $b=8$cm e $c=9$cm. *Resp.:* 1,1875
6. Calcular a projeção do lado a sôbre o lado b do $\triangle\, ABC$, onde $a=6$cm, $b=10$cm e $c=12$cm *Resp.:* 0,4cm
7. Calcular o lado a do $\triangle\, ABC$, onde $b=5$cm, $c=3$cm e a projeção do lado a sôbre b mede 5,2cm. *Resp.:* 6cm
8. Calcular o lado a do triângulo acutângulo ABC, onde $b=7$m, $c=5$m e a projeção de b sôbre c mede 1m. *Resp.:* 8
9. Calcular o lado c do triângulo ABC, obtusângulo em A, sendo $a=8$m, $b=5$m e a projeção de c sôbre b igual a 0,3m. *Resp.:* 6m
10. Os lados de um triângulo ABC medem, respectivamente, 7m, 5,6m e 4,2m. Calcular a projeção do lado b sôbre o lado c. *Resp.:* zero, triângulo retângulo
11. Calcular as alturas de um triângulo, cujos lados são: $a=10$m, $b=26$m, $c=24$m. *Resp.:* 24m, 9,23m, 10m
12. Calcular as alturas de um triângulo, cujos lados medem respectivamente 9m, 10m e 17m. *Resp.:* 8m, 7,2m e 4,23m

13. Calcular as bissetrizes internas de um triângulo, cujos lados são $a=10$, $b=8$ e $c=6$. *Resp.:* $\frac{24}{7}\sqrt{2}$, $3\sqrt{5}$ e $\frac{8}{3}\sqrt{10}$
14. Calcular as bissetrizes internas de um triângulo, cujos lados medem 5m, 8m e 9m. *Resp.:* $\frac{24}{17}\sqrt{33}$, $\frac{8}{13}\sqrt{55}$, $\frac{3}{7}\sqrt{165}$
15. Calcular as três medianas de um triângulo, cujos lados medem, respectivamente, 5m, 6m e 7m. *Resp.:* 4,27; 5,29; 6,02
16. Calcular as medianas de um triângulo, cujos lados são: $a=8$m, $b=11$m e $c=17$m. *Resp.:* 13,7m, 12,1m e 4,5m
17. Calcular a bissetriz externa traçada sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem 5m e 12m, respectivamente. *Resp.:* 12,1
18. Calcular as duas bissetrizes externas de um triângulo isósceles, cujos lados são: $a=b=12$ e $c=20$. *Resp.:* $10\sqrt{3}$
19. Num triângulo isósceles a base tem 12dm e o raio do círculo inscrito, 3dm. Calcular os lados iguais e a altura. *Resp.:* $l=10$dm, $h=8$dm
20. Calcular as medianas de um triângulo retângulo, sabendo que a soma dos catetos é 21m e estão entre si na razão 3/4. *Resp.:* 7,5; 12,86; 10,8
21. Calcular as alturas de um triângulo de 18m de perímetro, sabendo que os lados são proporcionais aos números 2, 3 e 4. *Resp.:* 2,9; 3,87 e 5,8
22. Calcular as medianas de um triângulo de 39m de perímetro e cujos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 6. *Resp.:* 5,6; 12,9; 14,6
23. Num triângulo isósceles a altura principal (traçada sôbre o lado desigual) tem 4m e o raio do círculo inscrito 1m. Calcular os lados. *Resp.:* $a=2{,}828$m; $b=c=4{,}243$m
24. Calcular a base menor de um trapézio isósceles, cujos ângulos agudos medem 45°, sabendo-se que a base maior tem 19,8m e os lados não paralelos 7,07m cada um. *Resp.:* 9,8m
25. Dois lados de um triângulo medem respectivamente 4m e 5m e formam um ângulo de 34° 40′. Calcular o terceiro lado. *Resp.:* 2,8m
26. Calcular as diagonais de um paralelogramo, onde dois lados consecutivos formam um ângulo de 43° e medem, respectivamente, 5cm e 7cm. *Resp.:* 4,77cm e 11,18cm
27. Dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 4dm e 6dm e formam um ângulo de 51° 30′. Calcular o terceiro lado e sua projeção sôbre o segundo. *Resp.:* 4,7 e 3,5
28. Os lados de um triângulo medem, 5dm, 8dm e 10dm. Calcular a ceviana que divide o lado maior em dois segmentos de 2dm e 8dm, respectivamente, sendo o menor segmento contíguo ao menor lado. *Resp.:* 4,1

29. Dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 8cm e 5cm e formam um ângulo de 60°. Calcular o terceiro lado e sua projeção sôbre o menor lado. *Resp.:* 7cm e 1cm

30 Num trapézio isósceles a base maior tem 14dm e os lados não paralelos 6dm cada um. Calcular a base menor, as diagonais e a altura, sabendo que os ângulos adjacentes à base maior têm 38°.
Resp.: 4,55; 9,9; 3,69

31. Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 5cm, 7cm e 10cm. Calcular a ceviana que divide o maior lado internamente na razão 2/3, sendo o menor segmento contíguo ao maior lado. *Resp.:* 3,9

32. Os lados de um triângulo medem respectivamente 4dm, 9dm e 12dm. Calcular a ceviana externa que divide o lado maior em dois segmentos subtrativos na razão de 2/3. *Resp.:* 27,38m

33. Os lados de um triângulo medem 4dm, 9dm e 12dm. Calcular a ceviana interna que divide o lado maior em dois segmentos na razão de 1/2. *Resp.:* 5,2dm ou 2,3dm.

34. Dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 8m e 5m e formam um ângulo de 60°. Calcular as três medianas do triângulo.
Resp.: 5,6; 4,5; 7,1

35. Calcular as diagonais de um paralelogramo sabendo que dois lados consecutivos medem, respectivamente, 8dm e 12dm e formam um ângulo de 60°. *Resp.:* $4\sqrt{7}$ e $4\sqrt{19}$

● **Provar os teoremas:**

36. Se as diagonais de um quadrilátero forem perpendiculares, a soma dos quadrados de dois lados opostos será igual à soma dos quadrados dos dois outros.

37. Num triângulo retângulo tem-se a relação: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

38. Num triângulo isósceles ABC toma-se sôbre a base BC um ponto arbitrário M. Demonstrar a tese $\overline{AB}^2 - \overline{AM}^2 = MB \cdot MC$.

39 A soma dos quadrados de dois lados de um triângulo é igual ao dôbro do quadrado da mediana relativa ao terceiro mais a metade do quadrado dêsse terceiro.

40. O produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto dos segmentos que a bissetriz interna determina no terceiro lado mais o quadrado dessa bissetriz. (Partir da relação de Stewart).

Nota: Para os exercícios de 25 a 35, usar a tábua da 3.ª série, pág. 212 ou dispensá-los.

IV. Relações métricas no círculo

13. Primeira: relação da ordenada.

Ordenada de um ponto da circunferência é o segmento de perpendicular traçada dêsse ponto a um diâmetro e goza da propriedade:

A ordenada de um ponto da circunferência é média proporcional entre os segmentos que determina sôbre o diâmetro.

Seja a ordenada MP, traçada do ponto M ao diâmetro AB (fig. 13).

Tese: $\overline{MP}^2 = PA \times PB.$

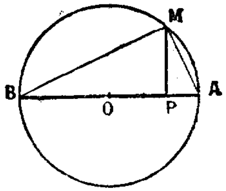


Fig. 13

Traçando as cordas MA e MB, fica formado o triângulo AMB que é retângulo, por estar o ângulo M inscrito num semicírculo. Como MP é altura do triângulo, concluímos:

$$\overline{MP}^2 = PA \times PB.$$

14. Segunda relação.

A corda traçada da extremidade de um diâmetro é média proporcional entre o diâmetro inteiro e sua projeção sôbre êle.

Considerando a mesma figura 13, a corda AM é um cateto do triângulo AMB, logo:

$$\overline{AM}^2 = AB \times AP.$$

15. Terceira relação.

> **Se várias cordas se cortam no mesmo ponto, o produto dos dois segmentos de cada uma é constante.**

Consideremos duas cordas AB e CD e seja I o ponto de intersecção (fig. 14).

Se demonstrarmos o teorema para as duas cordas AB e CD, podemos aplicá-lo a quaisquer outras que se cortem no mesmo ponto I, bastando para isso considerá-las duas a duas.

Temos, então, a tese:

$$IA \times IB = IC \times ID.$$

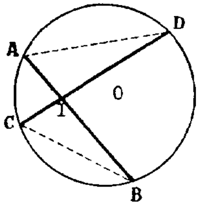


FIG. 14

Demonstração. Traçando as cordas AD e BC, temos:

$$\hat{B} = \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$$

logo, o triângulo AID é semelhante ao triângulo BIC. Dessa semelhança resulta:

$$\frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB} \therefore \boxed{IB \times IA = IC \times ID}$$

OBSERVAÇÃO. Se fôr considerado o sentido dos segmentos, os produtos serão negativos, porque os segmentos têm sempre sentidos opostos.

16. Quarta relação.

> **Se várias secantes são traçadas do mesmo ponto exterior, o produto das distâncias dêsse ponto aos dois pontos de intersecção de cada secante é constante.**

Consideremos duas secantes (fig. 15), temos:

Tese: $IA \times IB = IC \times ID$

Demonstração. Traçando as cordas BC e AD, temos:

$$\hat{C} = \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2},$$

e, como o ângulo I é comum, concluímos:

$$\Delta\, ADI \sim \Delta\, BCI$$

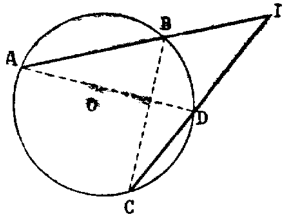


FIG. 15

Dessa semelhança, resulta:

$$\frac{IA}{IC} = \frac{ID}{IB} \therefore \boxed{IA \times IB = IC \times ID}$$

Demonstrada a relação para duas secantes, podemos considerá-la verdadeira para tôdas as secantes traçadas do ponto I, pois podemos repetir a demonstração considerando-as duas a duas.

17. Quinta relação.

> **Se de um ponto exterior a uma circunferência são traçadas uma tangente e uma secante, o segmento da tangente é média proporcional entre a secante inteira e sua parte externa.**

Seja a tangente AB e uma secante qualquer AD (fig. 16).

Tese: $AB^2 = AD \times AC.$

Demonstração. Traçando as cordas BC e BD, temos:

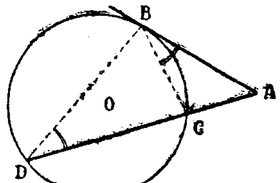


FIG. 16

$$\hat{D} = \widehat{ABC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

e, como o ângulo $\hat{A}$ é comum, concluímos:

$$\Delta\, ABC \sim \Delta\, ABD$$

Da semelhança resulta:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \therefore \boxed{\overline{AB}^2 = AC \times AD}$$

18. Potência de um ponto em relação a um círculo.

Definição. Potência de um ponto em relação a um círculo é o produto constante dos segmentos de uma secante qualquer que passe pelo ponto e compreendidos entre êle e os pontos de intersecção com a circunferência.

A potência do ponto exterior P será o produto $PA \times PB$ (fig. 17).

A potência do ponto interior P' será $P'A \times P'B$.

A potência de um ponto em relação a um círculo, é igual à diferença entre os quadrados de sua distância ao centro e do raio. Realmente, traçando do ponto P (fig. 17) a secante PMN que passa pelo centro, a potência p, do mesmo ponto, será:

$$p = PM \times PN \qquad (1)$$

Sendo r o raio e d a distância do ponto ao centro, os valores de PM e PN serão:

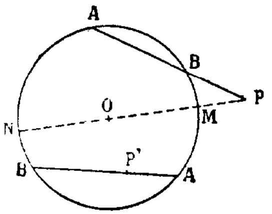


Fig. 17

$$PM = d - r$$
$$PN = d + r$$

Substituindo em (1), resulta:

$$p = (d - r)(d + r),$$

donde: $\boxed{p = d^2 - r^2}$

CONSEQÜÊNCIAS:

1.ª) *Se P é interior*, resulta: $d < r \therefore p < 0$.

2.ª) *Se P está na circunferência*, resulta : $d = r \therefore p = 0$.

3.ª) *Se P é exterior*, resulta: $d > r \therefore p > 0$.

4.ª) *A potência de um ponto exterior é igual ao quadrado da tangente traçada do mesmo ponto*, porque o produto dos segmentos PM e PN da secante é igual ao quadrado da tangente em virtude da quinta relação métrica.

EXERCÍCIOS

● *Resolver os problemas:*

1. A ordenada de um ponto da circunferência mede 6dm e o diâmetro do círculo, 13dm. Calcular os segmentos que a mesma ordenada determina no diâmetro. *Resp.:* 4dm e 9dm
2. Calcular a ordenada de um ponto da circunferência, sabendo que a mesma determina no diâmetro conjugado segmentos de 0,3m e 7,5m. *Resp.:* 1,5
3. O raio de um círculo tem 13m. Calcular a ordenada que divide o diâmetro em dois segmentos na razão de 4 para 9. *Resp.:* 12m
4. O raio de um círculo tem 12cm. Da extremidade de um diâmetro traça-se uma corda igual ao raio. Calcular a projeção da corda sôbre aquêle diâmetro. *Resp.:* 6cm
5. Da extremidade de um diâmetro traça-se uma corda de 14cm, cuja projeção sôbre o mesmo diâmetro é de 7cm. Calcular o raio. *Resp.:* 14cm
6. O raio de um círculo tem 13,5m. Da extremidade de um diâmetro traça-se uma corda, cuja projeção sôbre o mesmo diâmetro é de 12m. Calcular o comprimento dessa corda. *Resp.:* 18m
7. Num círculo duas cordas se cortam. Os dois segmentos da primeira medem, respectivamente, 3cm e 8cm. Calcular os dois segmentos da segunda corda, sabendo que estão entre si como 2 para 3. *Resp.:* 4cm e 6cm
8. Uma corda intercepta um diâmetro no ponto I dividindo-o em dois segmentos de 8cm e 18cm, respectivamente. Calcular a distância do ponto I ao centro, *Resp.:* 5cm
9. Num círculo duas cordas se cortam. Os dois segmentos da primeira medem, respectivamente, 3cm e 8cm. Calcular os dois segmentos da segunda, cujo comprimento total é de 10cm. *Resp.:* 4cm e 6cm
10. Duas secantes são traçadas do mesmo ponto exterior. Calcular os dois segmentos da primeira, cujo segmento interno tem 9m, sabendo que os segmentos total e externo da segunda medem, respectivamente, 4m e 9m. *Resp.:* 12m e 3m
11. O raio de um círculo tem 24m. De um ponto situado a 30m do centro traça-se uma tangente. Calcular o comprimento dessa tangente. *Resp.:* 18m
12. Da extremidade de um diâmetro traça-se uma corda, cuja projeção sôbre o mesmo diâmetro é de 2,5dm. Calcular o comprimento da corda, tendo o raio 6,6dm. *Resp.:* 5,7dm
13. Num círculo de 1m de raio, determinar a distância do centro a uma corda de 16dm. *Resp.:* 6dm

14. Num círculo de 2m de raio dá-se uma corda de 3m. Calcular a corda do arco duplo. *Resp.:* 3,96m

15. Duas cordas de um círculo cortam-se em um ponto P. Os dois segmentos da primeira medem 4cm e 18cm. O menor segmento da segunda tendo 6cm, quanto medirá o maior? *Resp.:* 12cm

16. Num círculo duas cordas se cortam. A primeira tem 17cm e seu menor segmento, 8m. Calcular os dois segmentos determinados sôbre a segunda, sendo um o dôbro do outro. *Resp.:* 6m e 12m

17. De um ponto exterior P traça-se uma secante, cujo segmento total tem 14cm e a parte interna, 8cm. Calcular a parte interna de uma outra secante traçada do mesmo ponto e cuja parte externa tem 4cm. *Resp.:* 17cm

18. De um ponto exterior traçam-se duas secantes a uma circunferência. A parte interna da primeira é o triplo da externa. As partes interna e externa da segunda medem, respectivamente, 6,4cm e 3,6cm. Calcular o segmento interno da primeira. *Resp.:* 9cm

19. De um ponto exterior traçam-se duas secantes tais que o segmento externo da primeira vale 2/3 do segmento externo da segunda. Calcular o segmento total da segunda, sabendo que o segmento total da primeira tem 12cm. *Resp.:* 8cm

20. A ordenada de um ponto de uma circunferência tem 5cm e um dos segmentos que determina no diâmetro tem 10cm. Calcular o raio. *Resp.:* 6,25

21. O raio de uma circunferência tem 6,5m e um dos segmentos em que uma ordenada divide o diâmetro tem 4m. Calcular a ordenada. *Resp.:* 6m

22. De um ponto P da circunferência traça-se uma ordenada que divide o diâmetro conjugado em dois segmentos de 9,6m e 5,4m. Calcular as distâncias do mesmo ponto aos extremos daquêle diâmetro. *Resp.:* 9m e 12m

23. De um ponto exterior P traça-se uma tangente que mede 10cm. A distância do ponto P ao centro é igual ao dôbro da tangente. Calcular o raio. *Resp.:* 17,32cm

24. O raio de um círculo mede 5cm. Calcular a tangente traçada de um ponto, cuja distância à circunferência é igual ao diâmetro. *Resp.:* 14,14cm

25. Num círculo duas cordas se cortam. Os dois segmentos da primeira corda têm, respectivamente, 18cm e 10cm. Calcular os dois segmentos da outra corda, cujo comprimento total é de 27cm. *Resp.:* 12cm e 15cm

26. Num círculo duas cordas se cortam. O produto dos segmentos de cada corda é 56m e a distância do ponto de interseção ao centro, 13m. Calcular o raio. *Resp.:* 15m

27. De um ponto situado a 10m do centro de um círculo de raio 6m traça-se uma secante, cuja parte interna tem 5m. Calcular o comprimento total da secante. *Resp.:* 10,88

28. Calcular a distância de um ponto exterior a uma circunferência de 5m de raio, sabendo que a tangente traçada do mesmo ponto tem 12m. *Resp.:* 8m

29. Num círculo a flecha de um arco tem 8dm e a corda do mesmo arco 32dm. Calcular o raio. *Resp.:* 2m

30. Por um ponto A duma circunferência de 9cm de raio, traça-se uma tangente. Determinar sôbre esta um ponto P, de modo que a parte externa da normal traçada de P seja igual à metade do segmento AP da tangente. *Resp.:* $AP = 12$cm

31. Por um ponto situado a 6cm do centro duma circunferência traça-se uma secante a essa circunferência que a encontra em dois pontos situados a 3cm e 8cm do ponto dado. Calcular o raio. *Resp.:* 3,464m

32. De um ponto que dista 9m do centro de um círculo traça-se uma tangente. Calcular o comprimento dessa tangente, sabendo-se que, no mesmo círculo, uma corda de 8m dista 3m do centro. *Resp.:* 7,48m

33. Calcular a corda de um círculo de 6m de raio, sabendo-se que a flecha do arco duplo tem 3m. *Resp.:* 6m

34. De um ponto situado a 3cm da circunferência de um círculo, traça-se uma tangente que tem 9cm de comprimento. Calcular o raio. *Resp.:* 12cm

35. O raio de um círculo tem 10cm. Achar o produto dos dois segmentos de uma corda qualquer, traçada de um ponto situado a 8cm do centro. Qual o comprimento da menor corda que passa no mesmo ponto? *Resp.:* 36cm^2 e 12cm

36. Calcular a potência de um ponto em relação a uma circunferência de 6cm de diâmetro, sendo de 7cm a distância do ponto ao centro. *Resp.:* 40

37. Calcular a potência de um ponto exterior em relação a uma circunferência de 5cm de raio, sendo de 3cm a distância do ponto à circunferência. *Resp.:* 39

38. Calcular o raio de uma circunferência, sabendo que um ponto exterior situado a 9cm do centro tem potência igual a 17. *Resp.:* 8cm

39. Calcular a distância de um ponto exterior ao centro duma circunferência de 10cm de diâmetro sabendo que a potência do mesmo ponto é igual a 24. *Resp.:* 7cm

40. De um ponto situado a 8cm de uma circunferência traça-se uma tangente, cujo comprimento é de 12cm. Calcular o raio. *Resp.:* 5cm

41. De um ponto de potência 64 em relação a uma circunferência traçou-se uma tangente à mesma circunferência. Calcular o comprimento da tangente. *Resp.:* 8

42. A distância de um ponto exterior a uma circunferência é igual à metade do diâmetro da mesma circunferência. Se a potência do mesmo ponto vale $48cm^2$, qual o comprimento do raio? *Resp.:* 4cm
43. A distância de um ponto ao centro de uma circunferência vale 0,9 do diâmetro. Se o raio tiver 1m, qual a potência do ponto em relação à circunferência? *Resp.:* 2,24
44. A que distância de uma circunferência de 6cm de raio deve estar um ponto para que o segmento total da secante traçada dêsse ponto e passando pelo centro seja igual ao dôbro da tangente traçada do mesmo ponto? *Resp.:* 4cm
45. Em um círculo, uma corda corta um diâmetro segundo um ângulo de 45°. A soma dos quadrados dos segmentos da corda é igual a $72cm^2$. Calcular o raio do círculo. *Resp.:* 6cm
46. Num círculo de raio igual a 5cm, uma corda corta um diâmetro formando um ângulo de 45°. O comprimento total da corda é de 8cm. Calcular os dois segmentos que o diâmetro considerado determina na mesma corda. *Resp.:* 7cm e 1cm

● Provar os teoremas:

47. As tangentes a duas circunferências secantes, traçadas de um ponto qualquer do suporte de sua corda comum, são iguais.
48. A tangente comum externa a duas circunferências tangentes exteriores é média geométrica entre seus diâmetros. Tese: $t=2.\sqrt{Rr}$.
49. Se uma corda corta um diâmetro formando um ângulo de 45°, a soma dos quadrados dos segmentos m e n determinados sôbre a corda é igual ao dôbro do quadrado do raio. Tese: $m^2+n^2=2r^2$
50. O quadrado do segmento traçado do centro de um círculo a um ponto de uma corda qualquer é igual à diferença entre o quadrado do raio e o produto dos segmentos em que o mesmo ponto divide a corda.

V. Polígonos inscritíveis e circunscritíveis. Teorema de Hiparco. Teorema de Pitot

19. Definições.

1.ª) ***Polígono inscrito*** no círculo é o polígono cujos vértices ficam situados sôbre a circunferência. Portanto, os lados são cordas, como o polígono $ABCD$, na figura 18.

O círculo diz-se circunscrito ao polígono.

2.ª) ***Polígono circunscrito*** ao círculo é o polígono cujos lados são tangentes à circunferência do círculo, como $A'B'C'D'E'$, na figura 22.

O círculo diz-se inscrito no polígono.

20. Triângulos inscritos e circunscritos.

1.º) ***Todo triângulo é inscritível.*** O centro do círculo circunscrito é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados (*circuncentro*), por ser equidistante dos três vértices (3.ª série, pág. 143).

2.º) ***Todo triângulo é circunscritível.*** O centro do círculo inscrito é o ponto de intersecção das bissetrizes internas (*incentro*) por ser equidistante dos três lados (3.ª série, pág. 144).

21. Quadriláteros inscritos.

a) ***Teorema fundamental.***

Em todo quadrilátero convexo inscrito os ângulos opostos são suplementares.

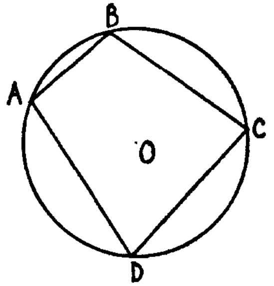


FIG. 18

Seja o quadrilátero inscrito $ABCD$ (fig. 18).

Temos:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2}$$

$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{DAB}}{2}$$

Somando:

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{DAB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

Anàlogamente: $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

Recíproca.

> **Todo quadrilátero convexo, cujos ângulos opostos são suplementares, é inscritível.**

Seja o quadrilátero $ABCD$ (fig. 18), temos, por hipótese:

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \quad \text{e} \quad \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

Traçando a circunferência determinada pelos três pontos A, B e C, o ponto D será necessàriamente ou interior ou exterior ou pertencerá à curva.

1.°) Suponhamos D *interior*. Neste caso, a medida do ângulo D seria maior que a metade do arco ABC e teríamos:

$$\hat{D} > \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}$$

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}$$

donde $\quad \hat{B} + \hat{D} > \dfrac{\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ADC}}{2} \quad$ ou $\quad \hat{B} + \hat{D} > 180,$

o que é contra a hipótese.

2.°) Suponhamos D *exterior*. Neste caso, teríamos:

$$\hat{D} < \frac{\overset{\frown}{ABC}}{2} \qquad \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

$$\hat{B} + \hat{D} < \frac{\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{AC}}{2} \quad \text{ou} \quad \hat{B} + \hat{D} < 180,$$

o que é também contra a hipótese.

Assim, o ponto não é interior nem exterior, concluindo-se que está sôbre a curva.

CONSEQÜÊNCIA. ***A condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja inscritível é que dois ângulos opostos sejam suplementares.***

São, pois, sempre inscritíveis: o *quadrado*, o *retângulo* e o *trapézio isósceles*.

Nunca são inscritíveis: o *losango*, o *paralelogramo qualquer* e o *trapézio escaleno*.

b) ***Teorema de Hiparco.***

> **Em todo quadrilátero inscrito o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.**

Seja o quadrilátero inscrito $ABCD$ (fig. 19). Representemos por α e β os comprimentos das diagonais e por a, b, c, d os comprimentos dos lados, como indica a figura.

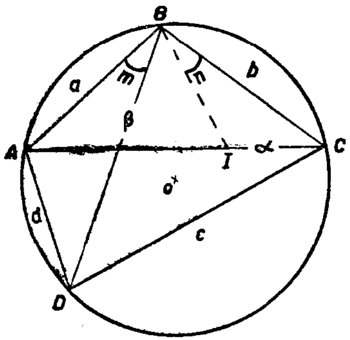


FIG. 19

Temos a tese:

$$\boxed{\alpha\beta = ac + bd}$$

Demonstração. Tracemos o segmento BI, isogonal de BD em relação ao ângulo B, isto é:

$$\hat{m} = \hat{n}.$$

Podemos então concluir:

1.°) $\Delta\, BCI \sim \Delta\, ABD$, por terem dois ângulos respectivamente iguais:

$$\hat{m} = \hat{n} \text{ (construção)}$$

$$\widehat{BCI} = \widehat{ADB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

Dessa semelhança resulta:

$$\frac{b}{\beta} = \frac{CI}{d} \quad \therefore \quad \beta \,.\, CI = bd \qquad (1)$$

2.°) $\Delta ABI \sim \Delta BDC$, ainda por terem dois ângulos iguais:

$$\widehat{ABI} = \widehat{DBC} \text{ (em virtude da construção)}$$

$$\widehat{BAI} = \widehat{BDC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}.$$

Da semelhança resulta:

$$\frac{a}{\beta} = \frac{AI}{c} \quad \therefore \quad \beta \,.\, AI = ac \qquad (2)$$

Adicionando as igualdades (1) e (2) e colocando β em evidência, vem: $\beta \,.\, (AI + CI) = ac + bd.$

A soma $AI + CI$ é a diagonal α; daí, a tese:

$$\boxed{\alpha\beta = ac + bd}$$

22. Quadriláteros circunscritos.

a) *Teorema de Pitot.*

Em todo quadrilátero circunscrito a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

Seja o quadrilátero circunscrito $ABCD$ (fig. 20). Teremos a tese:

$$AB + CD = BC + AD$$

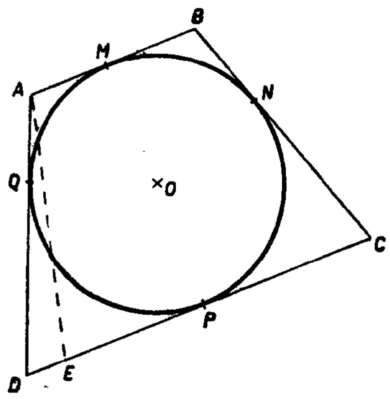


FIG. 20

Demonstração. Como os segmentos das duas tangentes traçadas do mesmo ponto são iguais, conclui-se (fig. 20):

$$AM = AQ$$
$$BM = BN$$
$$CP = CN$$
$$DP = DQ$$

Adicionando, membro a membro, conclui-se a tese:

$$\boxed{AB + CD = BC + AD}$$

b) *Recíproca.*

Todo quadrilátero em que a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois, é circunscritível.

Demonstração. Suponhamos o quadrilátero $ABCD$ (fig. 20), onde se tenha a hipótese:

$$AB + CD = BC + AD$$

Tracemos a circunferência tangente aos três lados AB BC e CD e cujo centro será a intersecção das bissetrizes dos ângulos B e C. Se esta circunferência não tangenciar o lado AD, poderemos traçar do vértice A a tangente AE. O quadrilátero $ABCE$ será circunscrito e teremos, pelo teorema direto:

$$AE + BC = AB + CE \qquad (1)$$

e, considerando o triângulo ADE:

$$AD < AE + ED \qquad (2)$$

Somando as relações (1) e (2) e suprimindo o têrmo AE comum aos dois membros, vem:

$$AD + BC < AB + CD,$$

o que contraria a hipótese. Assim, podemos concluir que a circunferência tangencia o quarto lado e o quadrilátero é circunscritível.

Conseqüência. ***A condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja circunscritível é que a soma de dois lados opostos seja igual à soma dos outros dois.***

Dêsse modo são sempre circunscritíveis o quadrado e o losango.

EXERCÍCIOS

● *Resolver os problemas:*

1. Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo. As bases medem respectivamente 4dm e 9dm. Calcular o comprimento dos lados não paralelos. *Resp.:* 6,5dm
2. Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo. Um dos lados não paralelos mede 5dm e a base maior 6dm. Calcular a base menor. *Resp.:* 4dm
3. Achar a base média de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo, sabendo que os lados não paralelos medem cada um 7dm. *Resp.:* 7dm
4. Um trapézio isósceles está circunscrito a um círculo de raio igual a 3dm. Os ângulos adjacentes à base maior do trapézio medem 67° 24′. A base menor tem 4dm. Calcular a base maior e os lados não paralelos. *Resp.:* 8,8dm e 6,4dm
5. As bases de um trapézio inscrito num semicírculo subtendem arcos que valem, respectivamente, 1/8 e 1/3 da circunferência. Calcular os ângulos internos do trapézio. *Resp.:* 41° 15′ e 138° 45′
6. O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo. Os ângulos A e B têm, respectivamente, 38° 26′ e 108° 16′; calcular os ângulos C e D. *Resp.:* 141° 34′ e 71° 44′
7. As bases de um trapézio inscrito num círculo subtendem arcos que medem, respectivamente, 1/6 e 1/10 da circunferência. Calcular os ângulos internos do trapézio. *Resp.:* 1.ª sol.: 24° e 156°; 2.ª sol.: 84° e 96°

8. Um círculo está inscrito num triângulo, cujos lados têm, respectivamente, 5cm, 8cm e 9cm. Calcular as distâncias dos vértices do triângulo aos pontos de contacto. *Resp.:* 2cm, 3cm e 6cm
9. Os lados de um triângulo retângulo medem respectivamente, 6cm, 8cm e 10cm. Calcular o raio do círculo inscrito e as distâncias dos vértices aos pontos de contacto. *Resp.:* $r = 2$cm; 2cm, 4cm e 6cm.
10. Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 7cm, 9cm e 11cm. Calcular as distâncias dos vértices do triângulo aos pontos de contacto dos lados com a circunferência do círculo inscrito. *Resp.:* 2,5cm, 4,5cm e 6,5cm
11. Um triângulo ABC está inscrito num círculo. O arco AB mede 48° e o arco BC, 132°. Calcular os ângulos do triângulo. *Resp.:* 90°, 24° e 66°
12. O quadrilátero $ABCD$ está inscrito num círculo. Os ângulos A e B, medem, respectivamente, 68° e 108°. Calcular os ângulos C e D. *Resp.:* 72° e 112°
13. Calcular, no sistema sexagesimal, as medidas dos arcos AB, BC e CA, supostos descritos no mesmo sentido, sendo A, B e C os vértices do triângulo inscrito no círculo e os ângulos A e B medindo, respectivamente, 72gr e 108gr. *Resp.:* 36°, 129° 36′ e 194° 24′
14. Os arcos AB, BC e CD, supostos descritos no mesmo sentido, medem, respectivamente, 90°, 38°, 108°. Calcular os ângulos internos do quadrilátero inscrito $ABCD$. *Resp.:* 73°, 116°, 107° e 64°
15. Calcular, no sistema decimal, o ângulo formado pelo lado do triângulo eqüilátero inscrito num círculo, e a semi-reta exterior, normal à circunferência num dos vértices do mesmo triângulo. *Resp.:* 166,6gr
16. Os lados de um quadrilátero inscrito medem, nesta ordem, 2,1cm, 4,5cm, 6cm e 7,2cm e uma das diagonais, 6cm. Calcular a outra diagonal. *Resp.:* 7,5cm.
17. As cordas de dois arcos de uma circunferência de raio 5cm medem 4cm e 6cm. Calcular a corda do arco soma dos arcos dados. *Resp.:* 8,7cm

● *Provar os teoremas:*

18. Todo trapézio inscrito no círculo é isósceles.
19. O raio do círculo inscrito num triângulo eqüilátero é igual a um têrço da altura.
20. O diâmetro do círculo inscrito em um triângulo retângulo é igual à diferença entre a soma dos catetos e a hipotenusa.

VI. Polígonos regulares

A) PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS REGULARES

23. Definições. Um *polígono* é *regular* quando tem todos os lados iguais e todos os ângulos também iguais.

No estudo dos polígonos regulares consideram-se os denominados *convexos* e os *estrelados*. Na figura 21, o pentágono regular $ABCDE$ é convexo e $FGHIJ$ é estrelado.

Estudaremos apenas os ***convexos***.

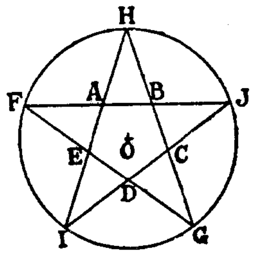


Fig. 21

24. Teorema fundamental.

> **Sendo a circunferência dividida em n arcos iguais, as cordas que unem os pontos sucessivos de divisão formam um polígono regular convexo, inscrito, e as tangentes traçadas pelos pontos de divisão formam um polígono regular convexo, circunscrito, ambos com n lados.**

Demonstração. Seja a circunferência O, dividida em n arcos iguais pelos pontos A, B, C, D, E, ... (fig. 22).

1.º) O polígono inscrito $ABCDE$ ... é regular.

Realmente, os lados AB, BC, CD, ..., são iguais, como cordas que subtendem arcos iguais. Os ângulos internos A B, C, ..., são, também, iguais como ângulos inscritos, cujos lados compreendem $n-2$ divisões iguais da circunferência.

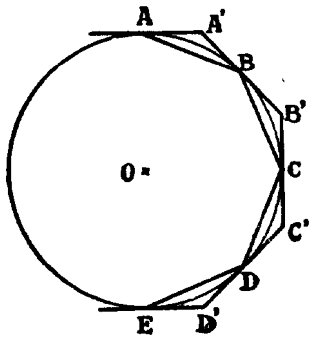


FIG. 22

2.ª) O polígono $A'B'C'D'$ . . . circunscrito, é regular.

Os triângulos isósceles $AA'B$, $BB'C$, $CC'D$, etc., são iguais de acôrdo com o primeiro caso, pois têm iguais os lados AB, BC, CD, etc., em virtude da demonstração anterior e também iguais os ângulos adjacentes a êsses lados, por serem ângulos de segmento da mesma medida.

Da igualdade dos triângulos conclui-se:

$$\hat{A}' = \hat{B}' = \hat{C}' = \ldots \qquad (1)$$

e

$$AA' = A'B = BB' = B'C = \ldots$$

Sendo iguais êstes últimos segmentos, serão iguais as somas obtidas adicionando-os dois a dois, isto é:

$$A'B' = B'C' = C'D' = \ldots \qquad (2)$$

Em virtude das igualdades (1) e (2), o polígono circunscrito tem os ângulos iguais e os lados iguais e é, portanto, regular.

Observação. Êste teorema assegura a existência de polígonos regulares. Há polígonos regulares convexos, com qualquer número de lados, cuja construção subordina-se à divisão da circunferência em partes iguais.

Recíproca:

> **Todo polígono regular é inscritível e circunscritível.**

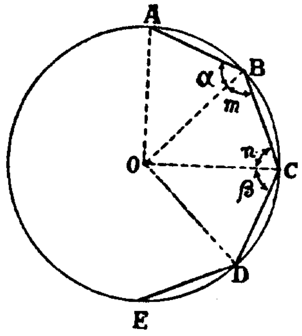


FIG. 23

Demonstração. Seja o polígono regular $ABCDE$ . . . (fig. 23).

1.º) Tracemos a circunferência O, determinada pelos três pontos A, B, C e teremos:

$$OA = OB = OC$$

logo, os triângulos isósceles OAB e OCB são congruentes por fôrça do terceiro caso.

Resta provar que a mesma circunferência passará pelos demais vértices, isto é:

$$OA = OD = OE = \ldots$$

Consideremos os dois triângulos OAB e OCD, que têm dois lados respectivamente iguais:

$$AB = CD \text{ (polígono regular)}$$
$$OB = OC \text{ (construção).}$$

Como os ângulos ABC e BCD do polígono regular são iguais, bem como os ângulos m e n do triângulo isósceles OBC, conclui-se:

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

e, conseqüentemente, os triângulos considerados são congruentes em virtude do segundo caso e temos:

$$OD = OA$$

Assim, a circunferência O passa pelo vértice D. Anàlogamente provaremos que a circunferência passa pelos demais vértices do polígono. Êste é, portanto, inscritível.

2.º) Seja o polígono regular $ABCD$ . . . (fig. 24).

Em virtude da primeira parte podemos inscrevê-lo na circunferência O, traçada em linha pontuada. Nesta circunferência, as cordas iguais AB, BC, CD, . . . , são eqüidistantes do centro; logo, temos:

$$OM = ON = OP = \ldots$$

Tracemos a circunferência de centro O e raio OM (linha cheia na fig. 24). AB, BC, CD, . . . , são tangentes a esta circunferência, por serem respectivamente perpendiculares à extremidade dos raios OM, ON, OP, . . . , logo, o polígono $ABCDE$ . . . é circunscritível.

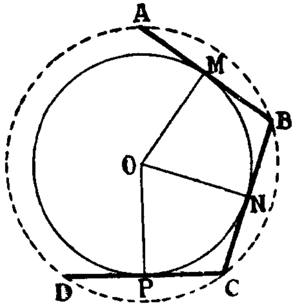


FIG. 24

Observação. **A circunferência inscrita e a circunscrita ao mesmo polígono regular são concêntricas.**

25. Elementos dos polígonos regulares.

Centro de um polígono regular é o centro da circunferência circunscrita e, portanto, da inscrita; ponto O, figura 24.

Raio do polígono regular é o raio da circunferência circunscrita; OA, figura 24.

Apótema é a distância do centro a qualquer lado. O apótema é igual ao raio do círculo inscrito; OM, figura 24.

Ângulo cêntrico (AOB, fig. 23) do polígono regular é o ângulo formado por dois raios consecutivos do mesmo polígono. O valor do ângulo cêntrico de um polígono regular convexo é $\frac{360^\circ}{n}$, sendo n o número de lados.

B) CONSTRUÇÃO E CÁLCULO DOS LADOS

26. Quadrado. Construção. Tracemos dois diâmetros perpendiculares AC e BD (fig. 25). A circunferência fica dividida em quatro arcos iguais, por corresponderem a ângulos centrais iguais, e $ABCD$ será o quadrado inscrito.

Cálculo do lado. O triângulo retângulo AOB, cuja hipotenusa é AB ou l_4, permite concluir:

$$l_4^2 = 2R^2$$

donde: $\boxed{l_4 = R\sqrt{2}}$

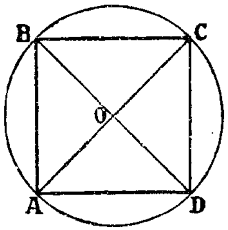


Fig. 25

27. Hexágono. Cálculo do lado. Seja AB o lado, l_6, do hexágono inscrito (fig. 26). Tracemos os raios OA e OB. O arco AB terá, por construção, 60° e, portanto, teremos:

$$O = 60^\circ;$$

logo, em virtude da lei de Tales:

$$\hat{A} + \hat{B} = 120^\circ,$$

e, como os ângulos A e B são iguais ($OA = OB$), resulta:

$$\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ;$$

e o triângulo AOB é eqüilátero, concluindo-se:

$$AB = OA = OB$$

ou, $\boxed{l_6 = R}$

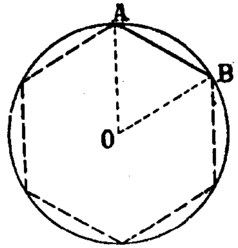


Fig. 26

Construção. Do exposto resulta que, para inscrever o hexágono regular num círculo dado, basta tomar sucessivamente, a partir de um ponto qualquer da circunferência, cordas de comprimento igual ao raio, como indicam as linhas pontuadas da figura 26.

28. Triângulo equilátero. Cálculo do lado. O lado do triângulo subtende o arco de 120° e o lado do hexágono o de 60°. Como êsses arcos são suplementares, o triângulo ABC (fig. 27) é retângulo em B, e teremos:

$$l_3^2 + l_6^2 = 4R^2$$

Substituindo o lado do hexágono por seu valor, resulta

$$l_3^2 + R^2 = 4R^2$$

donde, $l_3^2 = 3R^2$

e, finalmente: $\boxed{l_3 = R\sqrt{3}}$

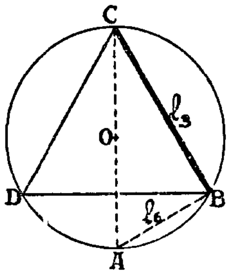


Fig. 27

Construção. Traça-se um diâmetro AC (fig. 27). A partir de um dos extremos, A por exemplo, traça-se a corda AB igual ao lado do hexágono, isto é, de comprimento igual ao raio. A corda BC, do arco suplementar, será o lado do triângulo; aplicando-o com centro em B ou C, obtém-se o ponto D, que é o terceiro vértice do triângulo.

29. Decágono regular convexo. CÁLCULO DO LADO. Seja AB o lado l_{10}, do decágono convexo (fig. 28, I). O ângulo central O terá 36° e, como o triângulo AOB é isósceles, conclui-se:

$$\hat{B} = \widehat{OAB} = 72^\circ$$

Traçando a bissetriz BP do ângulo $\widehat{OBA}$, os ângulos assinalados com um traço terão 36° e os triângulos OBP e ABP são isósceles, concluindo-se:

$$OP = BP = AB \qquad (1)$$

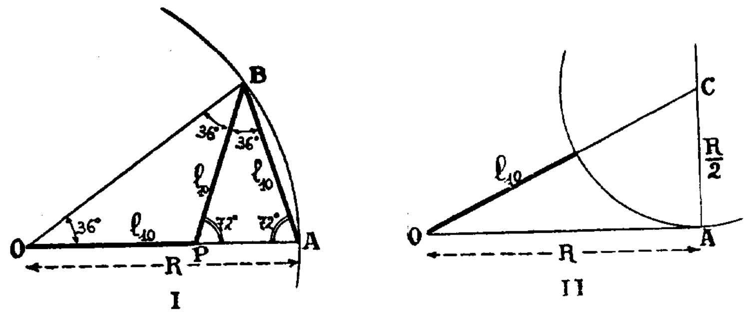


FIG. 28

No triângulo OAB o teorema da bissetriz interna dá:

$$\frac{OB}{OP} = \frac{AB}{AP}$$

ou, em virtude de (1):

$$\frac{OB}{OP} = \frac{OP}{AP}$$

Assim, o ponto P divide o raio OA em média extrema razão, e o segmento PO, ou, o que é o mesmo, o

lado AB do decágono é o segmento áureo do raio. Temos, pois:

$$l_{10} = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

CONSTRUÇÃO. Em virtude do exposto, conclui-se que, para inscrever o decágono regular convexo, basta dividir o raio OA em média e extrema razão, como indica a figura 28, II.

C) CÁLCULO DOS APÓTEMAS

30. Fórmula geral. Seja AB, o lado l_n, de um polígono de n lados. A perpendicular OC será o apótema a_n (fig. 29).

Tracemos o raio OA. O triângulo retângulo OCA, permite concluir:

$$a_n^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4} \qquad (1)$$

ou,

$$a_n = \frac{4R^2 - l_n^2}{4}$$

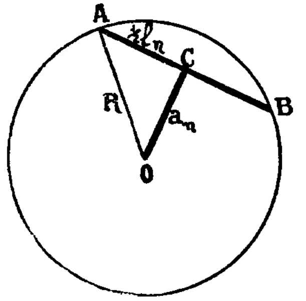


FIG. 29

Extraindo a raiz quadrada, obtemos, finalmente, a fórmula geral do apótema:

$$\boxed{a_n = \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}} \qquad (I)$$

OBSERVAÇÃO. A equação (I) permite, ainda, calcular o lado ou o raio de um polígono regular, quando é dado seu apótema, desde que a ela reunamos a fórmula do lado do mesmo.

31. Apótema do quadrado. O apótema do quadrado pode ser obtido pela fórmula geral. É, no entanto, simples

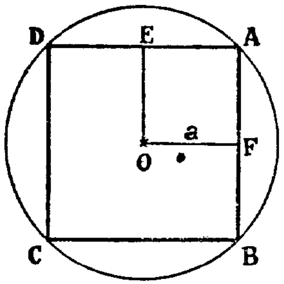


FIG. 30

observar que o apótema é igual à metade do lado, em virtude da teoria das paralelas. Realmente, o quadrilátero $OEAF$ é um quadrado (fig. 30); logo,

$$a_4 = \frac{l_4}{2} \therefore \boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

32. Apótema do hexágono. Temos, de acôrdo com a fórmula geral:

$$a_6 = \frac{\sqrt{4R^2 - l_6^2}}{2}$$

ou, substituindo o lado do hexágono por seu valor:

$$a_6 = \frac{\sqrt{4R^2 - R^2}}{2}$$

donde, finalmente:

$$\boxed{a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

33. Apótema do triângulo. Temos, de acôrdo com a fórmula geral:

$$a_3 = \frac{\sqrt{4R^2 - l_3^2}}{2}$$

ou, substituindo o lado por seu valor:

$$a_3 = \frac{\sqrt{R^2}}{2} \therefore \boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$$

34. Apótema do decágono. Aplicando a fórmula obtemos:

$$a_{10} = \frac{\sqrt{4R^2 - l_{10}^2}}{2}$$

ou, substituindo o lado do decágono:

$$a_{10} = \frac{\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})}}{2}$$

$$a_{10} = \frac{\sqrt{\frac{16R^2 - 6R^2 + 2R^2\sqrt{5}}{4}}}{2}$$

donde, finalmente:

$$\boxed{a_{10} = \frac{R\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$$

D) LADO DO POLÍGONO DE $2n$ LADOS EM FUNÇÃO DO DE n LADOS

35. Fórmula geral. Seja AB (fig. 31) o lado l_n, do polígono regular de n lados. Tracemos o raio OC, perpendicular a AB.

O ponto C divide o arco AB em duas partes iguais e, assim, a cada lado do polígono dado, corresponderão dois, concluindo-se:

$$AC = l_{2n}.$$

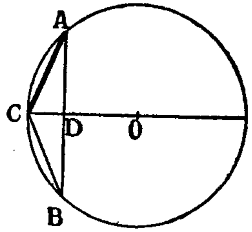


FIG. 31

Em virtude das relações métricas no círculo, teremos:

$$AC^2 = 2R \times CD$$

e

$$CD = R - OD$$

donde:

$$l_{2n}^2 = 2R(R - OD) = 2R^2 - 2R \times OD$$

Como OD é o apótema do polígono regular de n lados, temos, em virtude da fórmula geral correspondente:

$$l_{2n}^2 = 2R^2 - 2R \times \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}$$

donde, finalmente:

$$\boxed{l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}} \qquad \text{(II)}$$

36. Aplicações.

a) ***Octógono convexo.*** Fazendo $n = 4$, na fórmula (II), resulta:

$$l_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_4^2}}$$

ou, substituindo l_4 por seu valor:

$$l_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2}}$$

donde: $$l_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{2R^2}}$$

simplificando o radical, temos, finalmente:

$$\boxed{l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

Construção. Se dividirmos os ângulos cêntricos do quadrado em duas partes iguais, a circunferência ficará dividida em oito arcos iguais (fig. 32). A corda AB, que subtende um dêsses arcos é o lado do octógono convexo.

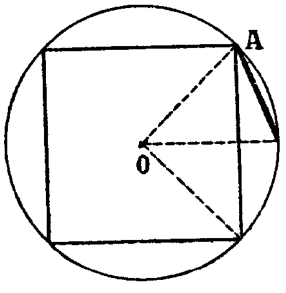


Fig. 32

Observação. Se dividirmos, em duas partes iguais, o arco subtendido pelo lado do octógono convexo, construiremos o polígono de 16 lados, cujo lado calcularemos pela fórmula geral (II). Assim procedendo sucessivamente, obteremos qualquer polígono, cujo número de lados seja da forma: 2×2^n

b) ***Dodecágono convexo.*** Fazendo $n = 6$, na fórmula geral (II), vem:

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_6^2}}$$

ou, substituindo o lado do hexágono:

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}}$$

donde, finalmente, simplificando o radical:

$$\boxed{l_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

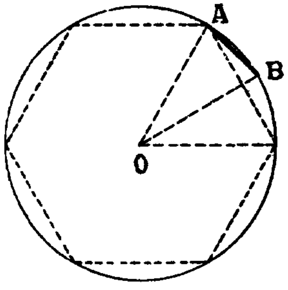


Fig. 33

Construção. Basta dividir ao meio o arco que subtende o lado do hexágono (fig. 33). AB é o lado do dodecágono.

E) SEMELHANÇA DE POLÍGONOS REGULARES

37. Teorema fundamental.

> **Dois polígonos regulares do mesmo número de lados são semelhantes.**

Demonstração. Consideremos dois polígonos regulares do mesmo número de lados e representemos por l o lado do primeiro e l_1, o do segundo.

Em virtude da fórmula do ângulo interno, teremos:

$$a_i = \frac{180° (n - 2)}{n}$$

Podemos, pois, concluir que os ângulos internos do primeiro são iguais aos do segundo, em virtude de ser o mesmo o valor de n, para os dois polígonos.

Por outro lado, a razão entre dois lados homólogos quaisquer será sempre $\frac{l}{l_1}$, e os lados são proporcionais.

Assim, os dois polígonos têm os ângulos iguais e os lados homólogos proporcionais e são, portanto, semelhantes.

38. Conseqüência. Tanto os apótemas como os raios dos círculos circunscritos, são segmentos homólogos e, portanto, podemos concluir:

> **Os perímetros, os raios e os apótemas, de dois polígonos regulares do mesmo número de lados estão entre si na mesma razão dos lados.**

39. Aplicação. Dois polígonos regulares do mesmo número de lados, um inscrito no círculo e o outro a êle circunscrito são, então, semelhantes e o raio do inscrito é o apótema do circunscrito.

Assim, sendo L e R o lado e o apótema de um polígono regular circunscrito e l e a, o lado e o apótema do inscrito do mesmo número de lados, teremos, em virtude da conseqüência anterior:

$$\frac{L}{l} = \frac{R}{a} \quad \text{donde} \quad L = \frac{Rl}{a}.$$

Substituindo o apótema a pela fórmula correspondente, virá:

$$\boxed{L = \frac{2Rl}{\sqrt{4R^2 - l^2}}} \qquad \text{(III)}$$

fórmula que permite obter o lado do polígono circunscrito quando se tem o lado do inscrito semelhante.

F) APLICAÇÃO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS AOS POLÍGONOS REGULARES

40. Fórmulas gerais para os polígonos regulares. Com auxílio das relações trigonométricas podemos estabelecer fórmulas gerais para a resolução de um polígono regular qualquer.

Consideremos de modo geral, o lado AB de um polígono regular de n lados (fig. 34). O arco AB medirá $\frac{360°}{n}$ e o ângulo O que é sua metade medirá $\frac{180°}{n}$.

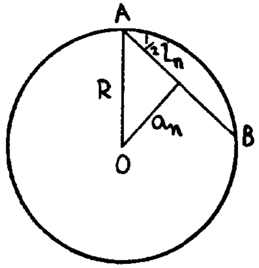


FIG. 34

Teremos, então, no triângulo retângulo formado pelo raio, apótema e metade do lado:

$$\text{sen}\,\frac{180°}{n} = \frac{l/2}{R} = \frac{l}{2R}.$$

e

$$\cos\frac{180°}{n} = \frac{a_n}{R};$$

donde as fórmulas gerais do lado e do apótema de um polígono regular qualquer de n lados:

$$l_n = 2R\,.\,\text{sen}\,\frac{180°}{n}$$

$$a_n = R\,.\,\cos\frac{180°}{n}$$

Exemplo: *Calcular o lado e o apótema do icoságono regular inscrito no círculo de raio igual a 5cm.*

Teremos, de acôrdo com as fórmulas:

$$l_{20} = 10\,.\,\text{sen}\,9° = 10 \times 0{,}159\,4 = 1{,}59\text{cm}$$

$$a_{20} = 5\,.\,\cos 9° = 5 \times 0{,}987\,7 = 4{,}94\text{cm}$$

G) FORMULÁRIO

FÓRMULAS GERAIS	LADOS	APÓTEMAS
$a_n = \dfrac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}$	$l_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = \dfrac{R}{2}$
$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$	$l_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$
$L = \dfrac{2Rl}{\sqrt{4R^2 - l^2}}$	$l_6 = R$	$a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$
	$l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$a_8 = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
$a_n = R \cdot \cos\dfrac{180°}{n}$	$l_{10} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$a_{10} = \dfrac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
$l_n = 2R \cdot \operatorname{sen}\dfrac{180°}{n}$	$l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$a_{12} = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

De um modo geral, o formulário acima permite resolver os problemas sôbre polígonos regulares combinando-se as fórmulas, o que conduz a um sistema de equações.

Exemplo: *Achar o apótema do triângulo equilátero, conhecido o lado.*

$$a_3 = \frac{R}{2}$$

$$l_3 = R\sqrt{3}$$

Eliminando R, por substituição, no sistema das duas equações:

$$R = \frac{l_3}{\sqrt{3}}$$

donde:

$$a_3 = \frac{l_3}{2\sqrt{3}} = \frac{l_3 \cdot \sqrt{3}}{6}.$$

EXERCÍCIOS

● **Resolver:**

1. O lado de um triângulo eqüilátero inscrito mede 3m. Calcular o lado do quadrado inscrito no mesmo círculo. *Resp.:* 2,44m
2. Achar o lado do decágono regular circunscrito a um círculo, sabendo que o apótema do triângulo eqüilátero inscrito no mesmo círculo mede 2m. *Resp.:* 2,56m
3. Achar o lado do hexágono inscrito num círculo, onde a diagonal do quadrado circunscrito mede 8m. *Resp.:* 2,828m
4. A diagonal do quadrado inscrito num círculo mede 4m. Achar o lado do triângulo eqüilátero inscrito no mesmo círculo. *Resp.:* 3,464m
5. O raio de um círculo tem 18cm. Determinar o perímetro do hexágono circunscrito. *Resp.:* 1,247m
6. Calcular o perímetro de um decágono regular, cujo apótema tem 1m. *Resp.:* 6,4m (aprox.)
7. Calcular o apótema de um dodecágono, cujo lado tem 6m. *Resp.:* 11,20m
8. A diferença entre o lado e o raio de um triângulo eqüilátero inscrito em um círculo é de 1,464m. Calcular o raio, considerando 1,732 para valor de $\sqrt{3}$. *Resp.:* 2m
9. No mesmo círculo estão inscritos um quadrado e um triângulo eqüilátero. O lado do quadrado tem 2m. Calcular o lado do triângulo. *Resp.:* 2,44m
10. Calcular o apótema do decágono inscrito num círculo de 10m de raio. *Resp.:* 9,51m
11. O lado do triângulo eqüilátero circunscrito a um círculo mede 6m. Calcular o apótema do hexágono regular inscrito no mesmo círculo. *Resp.:* 1,5m
12. Calcular o lado do octógono regular circunscrito a um círculo, onde o apótema do triângulo eqüilátero inscrito tem 1,5m. *Resp.:* 2,48m
13. Calcular o perímetro do hexágono regular circunscrito a um círculo, onde o lado do triângulo eqüilátero inscrito tem 2m. *Resp.:* 8m
14. Num semicírculo de 4cm de raio está inscrito um trapézio. A base menor é o lado do hexágono regular e a maior, o lado do triângulo eqüilátero, inscritos no mesmo círculo. Calcular a altura e os lados do trapézio. *Resp.:* 1,46cm e 2,07cm
15. Resolver o problema com os mesmos dados do anterior, estando, porém, o trapézio inscrito no círculo e o centro dêsse círculo compreendido entre as bases. *Resp.:* 5,46cm e 5,66cm

16. Achar a razão entre os perímetros de dois triângulos, um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência. *Resp.:* 1/2.
17. Achar a razão entre o apótema do triângulo eqüilátero e o lado do quadrado inscritos no mesmo círculo. *Resp.:* $\sqrt{2}/4$.
18. Achar a razão entre os perímetros do hexágono regular e do triângulo eqüilátero inscritos no mesmo círculo. *Resp.:* $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
19. Calcular os lados de um triângulo retângulo isósceles isoperímetro do quadrado inscrito num círculo, cujo diâmetro mede 4cm. *Resp.:* 3,3cm e 4,7cm
20. Calcular o comprimento da corda que subtende o arco de 120°, num círculo de 6cm de diâmetro. *Resp.:* $3\sqrt{3}$ cm
21. O ângulo *ABC*, de 90°, está inscrito num círculo. Calcular o raio do círculo, sabendo que as cordas *AB* e *BC* são iguais e medem, cada uma, 2cm. *Resp.:* $\sqrt{2}$ cm
22. O ângulo *ABC* mede 105° e está inscrito num círculo. O arco *AB* tem 60° e o raio do círculo tem 5cm. Calcular a corda do arco *BC*. *Resp.:* 7,05cm
23. Calcular o perímetro de um trapézio inscrito num círculo de raio igual a 5cm, sabendo que as bases do trapézio subtendem arcos de 60° e 120°, respectivamente, sendo o centro interior ao trapézio. *Resp.:* 27,8cm
24. Um quadrilátero *ABCD* está inscrito num círculo, cujo raio mede 4cm. Os arcos *AB*, *BC* e *CD* têm, respectivamente, 30°, 60° e 90° de amplitude. Calcular o perímetro do quadrilátero. *Resp.:* 19,7cm
25. O quadrilátero que tem por vértices os pontos médios dos lados de um quadrado é, também, um quadrado. Provar. Achar a razão entre os perímetros dos dois quadrados, sendo *a* o lado do primeiro. *Resp.:* $\sqrt{2}/2$.
26. Estabelecer a fórmula do lado do triângulo eqüilátero circunscrito a um círculo de raio *r*. *Resp.:* $2r\sqrt{3}$.
27. Estabelecer a fórmula do lado do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio *r*. *Resp.:* $L_6 = 2r\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
28. Calcular a distância entre dois lados paralelos de um octógono regular, cujo lado mede 6cm. *Resp.:* 14,46cm
29. Achar a razão entre os perímetros dos quadrados inscrito e circunscrito à mesma circunferência. *Resp.:* $\sqrt{2}/2$
30. Achar a razão entre os perímetros dos hexágonos regulares inscrito e circunscrito no mesmo círculo. *Resp.:* $\sqrt{3}/2$

● Provar os teoremas:

31. As diagonais de um pentágono regular são iguais.
32. As diagonais de um pentágono regular dividem-se mùtuamente em média e extrema razão.
33. O lado do triângulo eqüilátero circunscrito a uma circunferência é o dôbro do lado do triângulo inscrito na mesma circunferência.
34. Se *ABCDEF* fôr um hexágono regular, teremos: $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ e $CD \parallel AF$.
35. No triângulo isósceles, cujo ângulo do vértice tem 36°, a base é o segmento áureo do lado dividido em média e extrema razão.

● Resolver, utilizando as relações trigonométricas:

36. Calcular o lado e o apótema do pentágono inscrito no círculo de raio igual a 2m. *Resp.:* 2,36m e 1,62m
37. O lado do eneágono inscrito num círculo mede 3m. Calcular o raio e o apótema do mesmo polígono. *Resp.:* 4,3m e 4,1m
38. Calcular o lado e o apótema do pentadecágono inscrito no círculo de raio igual a 4dm. *Resp.:* 1,66m e 3,92m
39. O apótema de um polígono regular de 18 lados mede 6,2cm. Calcular o raio e o lado do mesmo polígono. *Resp.:* 6,3cm e 2,18cm
40. Calcular o lado e o apótema do quadrado inscrito no círculo cujo raio mede 6dm. *Resp.:* 8,48dm e 4,24dm

VII. Medição da circunferência. Cálculo de π

41. Definições. *Retificar* uma curva é determinar um segmento de reta de comprimento igual ao da curva dada.

Suponhamos uma linha poligonal $ABCD$, inscrita numa curva qualquer.

Se duplicarmos o número de lados da poligonal tomando os pontos médios M, N, P dos arcos correspondentes, obteremos uma nova poligonal $AMBN$ cujo perímetro é maior que o da precedente por lhe ser envolvente. Assim, se duplicarmos, sucessiva e indefinidamente, o número de lados, o perímetro da poligonal aumenta cada vez mais aproximando-se da curva (fig. 35).

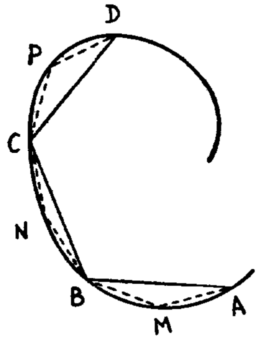


Fig. 35

Daí a definição:

Comprimento de uma curva é o limite para que tendem os perímetros das linhas poligonais inscritas quando o número de lados duplica indefinidamente.

42. Teorema fundamental. Fórmula de retificação.

A razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e o diâmetro é constante.

Demonstração. Consideremos duas circunferências de raios r e r' e comprimentos C e C', respectivamente, e suponhamos os polígonos regulares convexos de n lados, inscritos nas mesmas circunferências (fig. 36).

Os polígonos regulares inscritos são semelhantes e podemos concluir, representando por p_n e p'_n seus perímetros:

$$\frac{p_n}{r} = \frac{p'_n}{r'} \quad \text{ou} \quad \frac{p'_n}{2r} = \frac{p'_n}{2r'}$$

Considerando $n = 3, 4, 5, 6 \ldots$, formaremos uma sucessão de frações iguais, cujos numeradores se aproximam sempre mais dos comprimentos C e C' das duas circunferências, e portanto concluiremos:

$$\frac{C}{2r} = \frac{C'}{2r'}$$

Observação. A razão constante da circunferência para o diâmetro é representada pela letra grega π (lê-se *pi*); assim, para qualquer circunferência tem-se:

$$\frac{C}{2r} = \pi$$

donde:

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

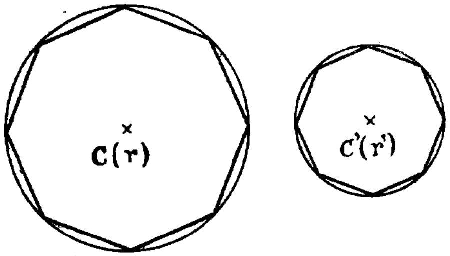


Fig. 36

Por intermédio dessa última fórmula poderemos calcular o comprimento de uma circunferência desde que conheçamos o número π.

43. Cálculo de π. Método dos perímetros. A teoria dos polígonos regulares fornece um meio para calcular π, conhecido por ***método dos perímetros*** ou ***de Arquimedes***.

Se considerarmos a circunferência de raio $r = 1$, da fórmula

$$C = 2\pi r$$

resultará:

$$\pi = \frac{C}{2}$$

Assim, o número π é igual à metade do número que exprime a medida do comprimento da circunferência de raio 1. Logo, se

$$p_1,\ p_2,\ p_3 \ldots p_n$$

forem os perímetros de uma sucessão de polígonos regulares inscritos ou circunscritos, cujo número de lados aumenta indefinidamente, teremos:

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{2}. \quad (*)$$

Aplicação. *Para formar a sucessão* $p_1, p_2, \ldots p_n$, *podemos tomar como ponto de partida o lado de um polígono regular qualquer e duplicar o número de lados por intermédio da fórmula conhecida:*

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

que, para o caso particular $r = 1$, será:

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}} \qquad (1)$$

Assim, tomando para ponto de partida o quadrado, teremos:

$$l_4 = \sqrt{2}$$

e, da fórmula (1), concluiremos para o lado l_8 do octógono, que tem 2^3 lados:

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Da mesma forma, para o lado do polígono de 16 ou 2^4 lados:

$$l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

(*) Lê-se π é o limite para o qual tendem os semiperímetros dos polígonos regulares inscritos no círculo de raio igual a um, quando o número de lados cresce indefinidamente.

e assim, sucessivamente, obteremos para o lado do polígono de 2^{n+1} lados:

$$l_{2^{n+1}} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}\ (n \text{ radicais}).$$

O perímetro será, então:

$$p_n = 2^{n+1} \times l_n \text{ ou } p_n = 2^{n+1}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$$

Como π é o limite do semiperímetro, resulta, dividindo por 2:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{+\ldots+\sqrt{2}}}}.$$

Calculando os lados e os semiperímetros obtêm-se os valores do quadro abaixo, partindo do quadrado. O semiperímetro do polígono de 4 096 lados fornece um valor de π com êrro menor que 0,000 001.

NÚMERO DE LADOS	COMPRIMENTO DO LADO	SEMIPERÍMETRO
4	1,414 214...	2,828 428...
8	0,765 366...	3,061 464...
16	0,390 180...	3,121 440...
32	0,196 034...	3,136 544...
64	0,098 136...	3,140 331...
128	0,049 082...	3,141 277...
256	0,024 544...	3,141 513...
512	0,010 272...	3,141 572...
1 024	0,006 136...	3,141 587...
2 048	0,003 068...	3,141 591...
4 096	0,001 534...	3,141 592...
....	....	....

44. Comprimento dos arcos de círculo. O comprimento duma circunferência de raio R é $2\pi R$ e a circunferência compreende 360 graus, logo o arco de um grau terá o comprimento

$$\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$$

e o comprimento l de um arco de n graus será dado pela fórmula:

$$\boxed{l = \frac{\pi R n}{180}}$$

ou

$$l = \frac{\pi R n}{200}$$

quando a medida é dada em grados.

OBSERVAÇÃO. Se o arco dado contiver minutos ou segundos é necessário transformar n e 180 em minutos ou segundos.

Exemplo. *Calcular o comprimento do arco de 18° 30′ 45″ do círculo de raio R*

Temos: $18° 30' 45'' = (18\times 60 + 30)\times 60 + 45 = 66645''$

donde $l = \dfrac{\pi R \times 66645}{180\times 60\times 60}$ ou $l = \dfrac{1481\pi R}{14400}$

45. Radiano.

> **Radiano é o ângulo central que intercepta um arco de comprimento igual ao raio.**

É a unidade do sistema de medida de arcos e ângulos denominado *circular* e representa-se pelo símbolo *rd*.

O número de radianos que corresponde a 360° ou 400gr é igual ao número de vêzes que o comprimento do raio fica contido no comprimento da circunferência. Êste número é 2π ou 6,283 2 aproximadamente, para todos os círculos, em virtude da fórmula $C = 2\pi r$. Assim, o radiano é um ângulo constante para todos os círculos e, portanto, independente do raio.

Problema. Conhecida a medida da amplitude dum arco de círculo em um sistema, determinar a medida em outro sistema.

Utilizando a correspondência:

$$360° \text{ —— } 400\text{gr} \text{ —— } 2\pi\text{rd}$$

ou

$$180° \text{ —— } 200\text{gr} \text{ —— } \pi\text{rd}$$

o problema resolve-se por regra de três.

Exemplos.

1.°) *Achar a medida em radianos do arco de* 11° 15′.

Temos a regra de três:

$$\begin{cases} \text{a } 180° & \text{correspondem } \pi\text{rd} \\ \text{a } 11°\,15' & \text{corresponderão } x\text{rd} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 10\,800' \longrightarrow \pi\text{rd} \\ 675' \longrightarrow x\text{rd} \end{cases}$$

donde:

$$x = \frac{675\pi}{10\,800} = \frac{1}{16}\pi.$$

Resposta: A medida é $\frac{\pi}{16}$ ou 0,196rd, aproximadamente.

2.°) *Achar a medida em graus do arco de* 0,58rd.

Temos a regra de três:

$$\begin{array}{ll} \text{a } \pi\text{rd} & \text{correspondem } 180° \\ \text{a } 0{,}58\text{rd} & \text{corresponderão } x° \end{array}$$

donde:

$$x = \frac{180 \times 0{,}58}{\pi} = \frac{104{,}4}{3{,}141\,6} = 33°\,13'\,50'' \text{ (aproximadamente).}$$

EXERCÍCIOS

1. Calcular o comprimento de uma circunferência de raio 3*m*. *Resp.:* 18,849m
2. Calcular o comprimento de uma circunferência, sabendo-se que o lado do triângulo eqüilátero inscrito mede 6m. *Resp.:* 21,7m
3. Calcular o comprimento de um arco de 28° 30′, em um círculo de raio 5m. *Resp.:* 2,487 1m
4. Calcular o comprimento do arco de 40gr, em uma circunferência de raio 8m. *Resp.:* 5,026 5m
5. Achar a medida em radianos do arco de 14° 28′. *Resp.:* 0,27rd

6. Calcular a medida em radianos do arco de 45,6gr. *Resp.:* 0,71rd
7. Calcular a medida em graus do arco de 0,25rd. *Resp.:* 14° 19′ 52″
8. Calcular a medida em grados do arco de 0,4rd. *Resp.:* 25,46gr
9. Num círculo de 5m de raio, um arco tem o comprimento de 1,57m. Calcular o número de graus do mesmo arco. *Resp.:* 18°
10. Num círculo está inscrito um quadrado, cuja diagonal mede 3m. Calcular o comprimento da circunferência do círculo. *Resp.:* 9,424 8m
11. O comprimento de um quadrante é de 8cm. Qual o raio do círculo? *Resp.:* 5,09cm
12. Calcular o apótema de um octógono inscrito num círculo, cuja circunferência tem 62,8m. *Resp.:* 9,2m
13. Calcular o comprimento de um arco de 30° 15′ 30″, em um círculo de raio 6m. *Resp.:* 3,167m
14. Calcular o raio de uma circunferência, cujo comprimento é de 21,98m. *Resp.:* 3,5m
15. Calcular o comprimento de uma circunferência, cujo diâmetro mede 1,20m. *Resp.:* 3,768m
16. Calcular a altura do triângulo eqüilátero inscrito num círculo, cuja circunferência tem 2,198m. *Resp.:* 0,53m
17. Calcular o apótema do hexágono regular inscrito num círculo cuja circunferência tem 1,497 2m. *Resp.:* 0,21m
18. As rodas de uma bicicleta têm 55cm de diâmetro. Se elas dão 1 800 voltas, que distância percorre a bicicleta? *Resp.:* 3,108 6km
19. As rodas de um automóvel têm 0,35m de raio. Quantas voltas dá cada roda, quando o carro percorre 9,891km? *Resp.:* 4 500
20. A roda grande de uma engrenagem tem 75cm de raio e faz 900 voltas enquanto a pequena dá 1 500. Qual o raio da roda pequena? *Resp.:* 45cm
21. O comprimento de uma circunferência é de 31,4m. Qual o polígono regular inscrito, cujo apótema mede 2,5m? *Resp.:* Triângulo
22. Numa circunferência, cujo comprimento é de 12,56m está inscrito um retângulo. Calcular os lados do retângulo, sendo a base o dôbro da altura. *Resp.:* 3,58m e 1,79m
23. Achar a razão entre o comprimento de uma circunferência e o perímetro do quadrado inscrito. *Resp.:* $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
24. Qual o raio de um círculo, onde um arco de 22° 30′ tem 1,57m de comprimento? *Resp.:* $r = 4$m
25. Calcular a distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular, cujo lado mede 4dm. *Resp.:* 6,92dm

UNIDADE III

GEOMETRIA

I) **Medição das áreas das principais figuras planas.**

II) **Relações métricas entre áreas.**

I. Medição das áreas das principais figuras planas

1. Definições. Sabemos que a medida de uma grandeza é o resultado da comparação com uma outra grandeza da mesma espécie escolhida para unidade. Assim, para medir uma superfície é necessário fixar uma unidade e a medida da superfície será a razão entre ela e a unidade escolhida.

A unidade de superfície freqüentemente usada é o *quadrado, cujo lado é a unidade de comprimento.* Se a unidade de comprimento fôr o metro, a unidade de superfície será o quadrado cujo lado tiver um metro, isto é, o *metro quadrado.*

A medida da superfície chama-se *área.*

Dois polígonos que têm a mesma área dizem-se *eqüivalentes.* Dois polígonos *congruentes* são sempre eqüivalentes; no entanto, dois polígonos eqüivalentes podem não ser *congruentes.* Assim, um quadrado pode ter a mesma área de um triângulo e não lhe é congruente.

Observação. As relações entre as figuras planas podem ser assim resumidas:

a) *Figuras congruentes* têm a mesma *forma* e a mesma *área;*
b) *Figuras semelhantes* têm a mesma *forma;*
c) *Figuras equivalentes* têm a mesma *área.*

2. Teoremas fundamentais.

I) **As áreas de dois retângulos que têm uma dimensão igual são proporcionais às dimensões desiguais.**

Sejam S e S' as áreas dos dois retângulos $ABCD$ e $EFGH$ (fig. 37) que têm a mesma base b, e, a e a', respectivamente, para alturas.

Teremos a tese:

$$\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

Demonstração. Dividamos as alturas AD e EH em partes iguais a um segmento α, o que é sempre possível, com êrro tão pequeno quanto quisermos, por ser α arbitrário.

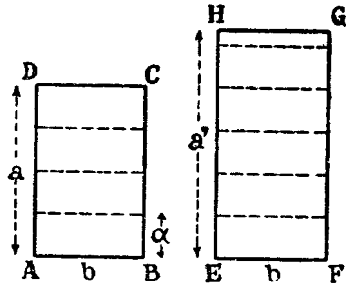


FIG. 37

Suponhamos que as alturas a e a' contenham α respectivamente m e p vêzes; teremos:

$$a = m\alpha$$
$$a' = p\alpha$$

Dividindo, membro a membro:

$$\frac{a}{a'} = \frac{m}{p} \qquad (1)$$

Pelos pontos de divisão de AD e EH tracemos paralelas às bases AB e EF. Os retângulos S e S' ficarão divididos, respectivamente, em m e p retângulos parciais iguais, por terem bases iguais por hipótese, e alturas iguais a α. Assim, temos, sendo r um dos retângulos parciais:

$$S = mr$$
$$S' = pr$$

Dividindo, membro a membro:

$$\frac{S}{S'} = \frac{m}{p} \qquad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), vem:

$$\boxed{\frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}}$$

II) **As áreas de dois retângulos quaisquer são proporcionais aos produtos dos números que exprimem as medidas de suas dimensões.**

Seja S a área de um retângulo de dimensões a e b e S' a dum retângulo de dimensões a' e b' (fig. 38).

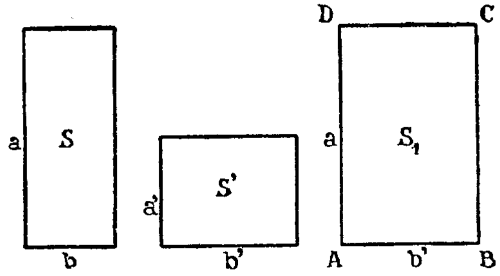


FIG. 38

Teremos a tese:

$$\frac{S}{S'} = \frac{ab}{a'b'}$$

Demonstração. Construamos o retângulo $ABCD$ (fig. 38), de dimensões a e b'. Representando sua área por S_1, podemos concluir, em virtude do primeiro teorema:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{b}{b'} \qquad \frac{S_1}{S'} = \frac{a}{a'}$$

Multiplicando as duas igualdades, membro a membro, resulta:

$$\frac{S}{S_1} \times \frac{S_1}{S'} \quad \text{ou} \quad \frac{S}{S'} = \frac{ab}{a'b'}$$

3. Área do retângulo. Seja S a área de um retângulo de dimensões a e b e S', a área do quadrado, cujo lado l é a unidade de comprimento.

Em virtude do segundo teorema, podemos escrever:

$$\frac{S}{S'} = \frac{ab}{l \times l} \quad \text{ou} \quad \frac{S}{S'} = \frac{a}{l} \times \frac{b}{l}$$

A razão $\frac{S}{S'}$ é a medida da área S com a unidade de área S', e as razões $\frac{a}{l}$ e $\frac{b}{l}$ são, anàlogamente, as medidas dos comprimentos a e b com a unidade l; daí, a conclusão:

O número que exprime a medida da área de um retângulo é igual ao produto dos números que exprimem as medidas de suas dimensões.

Abreviadamente diz-se: *a área do retângulo tem por medida o produto da base pela altura;* e escreve-se:

$$\boxed{S = bh}$$

sendo b a base e h a altura.

4. Área do quadrado. O quadrado é um retângulo cujas dimensões são iguais. Assim, se fôr l o lado de um quadrado, teremos:

$$S = l^2.$$

A área do quadrado tem por medida o quadrado do lado.

5. Área do paralelogramo. Seja o paralelogramo $ABCD$ (fig. 39).

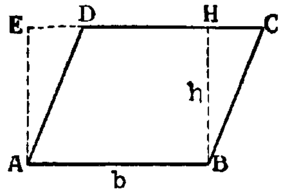


FIG. 39

Tracemos as perpendiculares AE e BH ao lado AB. Fica formado o retângulo $ABHE$ que tem a mesma base AB e a mesma altura BH do paralelogramo dado.

Os triângulos retângulos ADE e BCH são iguais, por terem a hipotenusa igual ($AD = BC$) e um cateto igual ($AE = BH$); logo, podemos concluir que o retângulo é eqüivalente ao paralelogramo, pois, subtraindo dêstes dois polígonos os triângulos iguais, obtemos o mesmo resultado que é o trapézio $ABHD$.

Como a base AB e a altura BH são comuns, conclui-se:

A área do paralelogramo tem por medida o produto da base pela altura.

Fórmula: $\boxed{S = bh}$

6. Área do triângulo. Seja o triângulo ABC (fig. 40), de base b e altura h.

Tracemos, pelos vértices B e C, paralelas aos lados opostos. Fica formado o paralelogramo $ABDC$ que tem a mesma base b e a mesma altura h do triângulo dado, e cuja área S' será, portanto:

$$S' = bh.$$

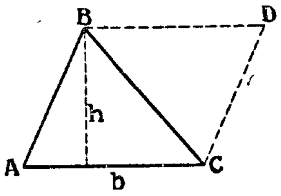


FIG. 40

Como a diagonal BC decompõe o paralelogramo em dois triângulos congruentes (3.º caso), conclui-se que a área de qualquer dêles será a metade da do paralelogramo, isto é:

$$\boxed{S = \frac{bh}{2}}$$

A área do triângulo tem por medida a metade do produto da base pela altura.

Observação. Como podemos tomar por base um qualquer dos três lados do triângulo, teremos, representando respectivamente por h_1, h_2 e h_3 as alturas relativas aos lados a, b e c:

$$S = \frac{ah_1}{2} = \frac{bh_2}{2} = \frac{ch_3}{2};$$

concluindo-se que, se multiplicarmos cada lado pela altura correspondente os três produtos obtidos serão iguais.

7. Área do triângulo em função dos lados. Seja h, a altura relativa ao lado a de um triângulo.

A área será:

$$S = \frac{ah}{2}.$$

Substituindo a altura por seu valor em função dos lados, que é:

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e simplificando os fatôres 2 e a, resulta:

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

8. Área do triângulo eqüilátero em função do lado. Seja o triângulo eqüilátero ABC (fig. 41), de lado l e altura h.

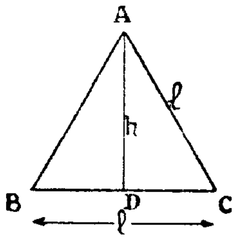


Fig. 41

A área será:

$$S = \frac{lh}{2}.$$

Substituindo o valor de h, $h = l\frac{\sqrt{3}}{2}$, na expressão da área, resulta:

$$\boxed{S = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}}$$

9. Área do triângulo em função do raio R, do círculo circunscrito. A área do triângulo é (fig. 41a):

$$S = \frac{ah_1}{2} \quad (1)$$

Na fig. 41a os triângulos retângulos, AHB e ADC são semelhantes. Logo:

$$\frac{h_1}{b} = \frac{c}{2R}$$

donde:

$$h_1 = \frac{bc}{2R}.$$

e, substituindo em (1):

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$$

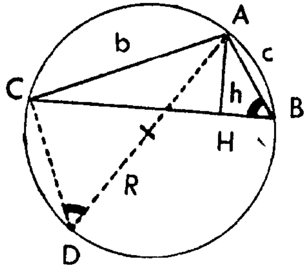


Fig. 41 a

10. Área em função do raio r, do círculo inscrito. Seja o triângulo ABC (fig. 42) e r, o raio do círculo inscrito

Unindo o centro O aos vértices, o triângulo ficará decomposto nos três triângulos OAB, OAC e OBC; logo, sua área será a soma das áreas dos triângulos parciais.

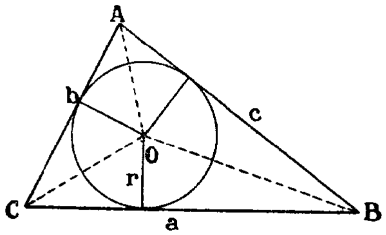


Fig. 42

Se tomarmos para base dos triângulos parciais os lados a, b, c, as alturas correspondentes serão iguais ao raio do círculo inscrito, em virtude da propriedade da tangente; logo, temos:

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}$$

ou,

$$S = \frac{a+b+c}{2} \times r$$

donde, finalmente:

$$\boxed{S = pr}$$

Aplicação. *Cálculo dos raios dos círculos circunscrito e inscrito, respectivamente, em função dos lados.*

Temos as fórmulas da área:

$$S = \frac{abc}{4R} = pr.$$

Tirando o valor dos raios e substituindo a área em função dos lados, obteremos:

$$R = \frac{abc}{4.S} \therefore \boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \therefore \boxed{r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$$

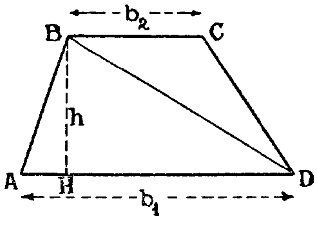


Fig. 43

11. Área do trapézio. Seja o trapézio $ABCD$, de bases b_1 e b_2 e altura h (fig. 43).

Tracemos a diagonal BD. O trapézio é a soma dos triângulos ABD e BCD, que têm a mesma altura h, e bases b_1 e b_2, respectivamente. Assim, a área S do trapézio será:

$$S = \frac{b_1 h}{2} + \frac{b_2 h}{2} \quad \text{ou,} \quad \boxed{S = \frac{b_1 + b_2}{2} \times h}$$

Conclui-se:

A área do trapézio tem por medida o produto da semi-soma das bases pela altura.

Observação. A semi-soma das bases de um trapézio é igual à base média; logo, representando por b_m a base média, a fórmula pode também ser escrita:

$$\boxed{S = b_m \times h}$$

12. Área do losango. O losango é um paralelogramo. A área será, pois, o produto das medidas da base e da altura; todavia, a área do losango pode também ser obtida por intermédio das diagonais.

Seja o losango $ABCD$. Representemos as diagonais por d_1 e d_2 (fig. 44).

A diagonal AC, por exemplo, decompõe o losango em dois triângulos ABC e ACD. Como as diagonais são perpendiculares, as alturas dos triângulos são BO e DO. Assim, a área S do losango será:

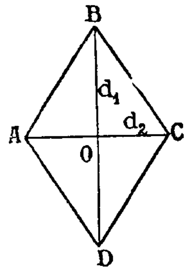


Fig. 44

$$S = \frac{AC \times BO}{2} + \frac{AC \times DO}{2}$$

ou, $$S = \frac{AC(BO + DO)}{2} = \frac{AC \times BD}{2}$$

Fórmula:

$$\boxed{S = \frac{d_1 \times d_2}{2}}$$

A área do losango tem por medida o semiproduto das diagonais.

13. Área dos polígonos. Para obter a área de um polígono qualquer decompõe-se o mesmo em triângulos ou em triângulos e trapézios. A área será a soma das áreas parciais obtidas.

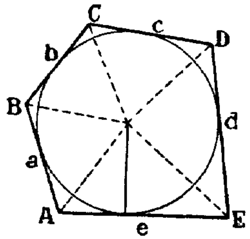


Fig. 45

No caso particular do *polígono circunscrito* a um círculo, *a área tem por medida o produto do semiperímetro pelo raio.*

Realmente, consideremos o polígono circunscrito $ABCDE$ (fig. 45). Unindo o centro aos vértices, o polígono fica decomposto em triângulos, cujas alturas são tôdas iguais ao raio, em virtude da propriedade da tangente. Assim, temos:

$$S = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \frac{dr}{2} + \frac{er}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c+d+e)\,r}{2}$$

donde:

$$\boxed{S = pr}$$

sendo p o semiperímetro.

14. Área dos polígonos regulares convexos. Todo polígono regular convexo é circunscritível e o raio do círculo inscrito é o seu apótema; logo, de acôrdo com o parágrafo anterior, podemos concluir a fórmula da área:

$$\boxed{S = pa}$$

A área de um polígono regular tem por medida o produto do semiperímetro pelo apótema.

Aplicações. A fórmula da área dos polígonos regulares convexos,

$$S = pa,$$

tem três aplicações principais:

1.°) *Cálculo da área em função do lado;*
2.°) *Cálculo da área em função do raio;*
3.°) *Cálculo da área em função do apótema.*

Exemplos:

1.°) *Calcular a área do hexágono regular convexo conhecido o lado.*

Resolução. Temos a fórmula geral:

$$S = pa \qquad (1)$$

e, para o caso do hexágono:

$$p = 3l \qquad (2)$$

Resta, pois, determinar o apótema em função do lado. Sabemos que, para o hexágono:

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo R por seu valor:

$$a = \frac{l\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Substituindo os valores (2) e (3) em (1), vem:

$$S = \frac{3}{2}\,l^2.\sqrt{3}$$

2.°) Área do decágono regular em função do raio.

Temos a fórmula:

$$S = pa \qquad (1)$$

e, para o caso do decágono (págs. 141 e 143):

$$p = 5l = 5 \times \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad (2)$$

e

$$a = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \qquad (3)$$

Substituindo os valores (2) e (3) na fórmula (1), vem:

$$S = \frac{5R^2}{8}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}$$

$$S = \frac{5R^2}{8}\sqrt{40-8\sqrt{5}}$$

donde, finalmente:

$$S = \frac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

3.º) *Área do dodecágono regular em função do apótema.*
Temos a fórmula geral:

$$S = pa \qquad (1)$$

e, para o caso do dodecágono:

$$p = 6l = 6R\sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Determinando o valor do raio na fórmula:

$$a = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

temos:

$$R = \frac{2a}{\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

Substituindo o valor de R em (2):

$$p = \frac{12a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Substituindo o valor de p na fórmula (1), vem:

$$S = \frac{12a^2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

ou, racionalizando: $S = 12a^2(2-\sqrt{3})$.

15. Expressão trigonométrica da área dos polígonos regulares. Temos a fórmula:

$$S = pa \qquad (1)$$

Supondo n o número de lados do polígono, vem (Unid. II, 40):

$$l_n = 2R \operatorname{sen}\frac{180}{n}$$

donde $$p = \frac{n \cdot 2R \operatorname{sen}\frac{180}{n}}{2} = nR \operatorname{sen}\frac{180}{n} \qquad (2)$$

e, $$a_n = R \cdot \cos\frac{180}{n} \qquad (3)$$

Substituindo os valores (2) e (3) em (1), temos, para um polígono regular de n lados, a fórmula geral:

$$\boxed{S_n = n \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{180}{n} \cdot \cos\frac{180}{n}}$$

Exemplos.

1.º) *Calcular a área do eneágono regular inscrito num círculo de raio 0,2m.*

Temos: $S_9 = 9 \times (0,2)^2 \operatorname{sen} 20° \cdot \cos 20°$.

Utilizando a tábua das funções trigonométricas, vem:

$$S_9 = 9 \times 0,04 \times 0,342 \times 0,939\,7.$$

ou $$S_9 = 0,115\,7\text{m}^2.$$

2.º) *Calcular a área do octógono regular de lado igual a 5cm.*

Temos: $l_8 = 2R \cdot \operatorname{sen}\frac{180°}{8} = 2R \cdot \operatorname{sen} 22°\,30'$.

Logo. $2R \operatorname{sen} 22°\,30' = 5$

e $$R = \frac{2,5}{\operatorname{sen} 22°\,30'}$$

Substituindo na fórmula da área:

$$S_8 = 8 \times \frac{6,25}{\operatorname{sen}^2 22°\,30'} \operatorname{sen} 22°\,30' \cdot \cos 22°\,30'$$

ou $$S_8 = \frac{50 \cos 22°\,30'}{\operatorname{sen} 22°\,30'} = \frac{50 \times 0,923\,9}{0,382\,7}$$

donde, finalmente:

$$S_8 = 120,70\text{cm}^2.$$

16. Área do círculo. Chama-se *área do círculo* o limite para o qual tendem as áreas dos polígonos regulares, convexos, inscritos, quando o número de lados cresce indefinidamente.

Seja S a área de um círculo de raio r e C, o comprimento da circunferência do mesmo círculo (fig. 46).

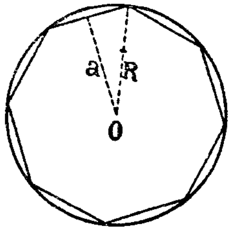


FIG. 46

Representemos por S', p e a, a área, o semiperímetro e o apótema de um polígono regular, convexo, inscrito; teremos:

$$S' = p \times a.$$

Se dobrarmos indefinidamente o número de lados, o perímetro do polígono terá por limite o comprimento da circunferência, o apótema a tenderá para o raio r, e a área será, por definição, o limite de S'; assim, teremos:

$$S = \frac{C}{2} \times r.$$

Conclui-se:

A área do círculo tem por medida o produto do comprimento da semicircunferência pelo raio.

Se substituirmos o comprimento C da circunferência por seu valor $2\pi r$, resultará a fórmula:

$$\boxed{S = \pi r^2}$$

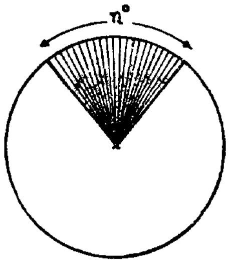


Fig. 47

17. Área do setor circular. Setor circular é a parte do círculo compreendida entre dois raios e o arco que os mesmos interceptam.

Representemos por u, a área do setor de 1° (fig. 47). A área S do setor de n°, será:

$$S = n \times u$$

e a área S' do círculo, $S' = 360u$.

Dividindo as duas igualdades, membro a membro, resulta:

$$\frac{S}{S'} = \frac{n}{360}.$$

donde:

$$S = \frac{n}{360} \times S'.$$

Substituindo S' por seu valor πr^2 vem:

$$\boxed{S = \frac{n\pi r^2}{360}}$$

fórmula que permite calcular a área do setor conhecido o raio r e o número n de graus do ângulo central.

Conseqüência:

A área de um setor tem por medida o semiproduto do raio pelo comprimento do arco.

Realmente, considerando a última fórmula, podemos concluir:

$$S = \frac{n\pi r^2}{360} = \frac{\pi r n}{180} \times \frac{r}{2}.$$

Como $\frac{\pi r n}{180}$ é o comprimento l do arco, conclui-se:

$$\boxed{S = \frac{l \times r}{2}}$$

18. Área do segmento circular. Segmento circular é a parte do círculo compreendida entre um arco e a corda que o subtende (fig. 48).

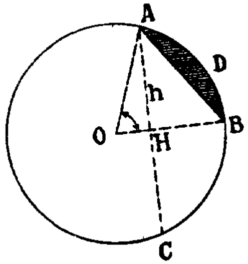


Fig. 48

Observemos que uma corda decompõe o círculo em dois segmentos; salvo indicação expressa em contrário, consideraremos sempre o *menor segmento.*

A área do segmento ADB (fig. 48) é a diferença entre a área do setor $OADB$ e a do triângulo OAB. Assim, representando por S a área do segmento, por l o comprimento do arco AB e por h a altura do triângulo OAB, teremos:

$$S = \frac{lr}{2} - \frac{rh}{2} \quad \text{ou,} \quad \boxed{S = \frac{r}{2}(l - h)}$$

Casos especiais.

Em certos casos, a área do segmento pode ser obtida por intermédio dos lados dos polígonos regulares. Realmente, observando que a altura h é a metade da corda AC, e que o arco AC é o dôbro do arco AB, pois o raio OB, perpendicular à corda AC, divide ao meio a corda e o arco por ela subtendido, podemos concluir:

> **A área do segmento circular tem por medida o produto da metade do raio pela diferença entre o comprimento de seu arco e a metade da corda do arco duplo.**

Assim, sempre que a corda AC, *do arco duplo,* fôr o lado de um polígono regular, poderemos calcular a área do segmento.

O quadro abaixo resume os principais valores que pode ter o arco AB do segmento, para que seja possível calcular h:

AB	$\widehat{ABC}$	$\overline{AC}$
15°	30°	l_{12}
18°	36°	l_{10}
22° 30′	45°	l_8
30°	60°	l_6
45°	90°	l_4
60°	120°	l_3
90°	180°	$2r$

Exemplo. *Calcular a área de um segmento de 60°, de um círculo de 4dm de raio.*

Resolução. O arco duplo AC (fig. 48) terá 120°; logo, a corda que o subtende é o lado do triângulo eqüilátero inscrito; assim, temos:

$$AC = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

donde
$$h = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{3} = 3{,}464\,0$$

O comprimento do arco será:

$$l = \frac{\pi r n}{180} = \frac{4 \times 60 \times \pi}{180} = \frac{4\pi}{3} = 4{,}188\,8$$

Aplicando a fórmula:

$$S = \frac{r}{2}(l - h)$$

teremos:
$$S = \frac{4}{2}(4{,}188\,8 - 3{,}464\,0) = 2 \times 0{,}724\,8$$

donde, finalmente:

$$S = 1{,}449\,6\text{dm}^2.$$

19. Expressão trigonométrica da área do segmento. Se considerarmos o triângulo AOH (fig. 48), concluiremos:

$$h = r \operatorname{sen} \hat{O}.$$

Substituindo êste valor na fórmula da área, vem:

$$\boxed{S = \frac{r}{2}(l - r \operatorname{sen} \hat{O})}$$

Esta expressão trigonométrica da área tem a vantagem de ser aplicável a qualquer segmento.

Exemplo. *Calcular a área de um segmento circular de 48° num círculo de raio 6dm.*

Resolução.

Temos:
$$l = \frac{6 \times 48\pi}{180} = 5{,}03$$

e
$$r \operatorname{sen} O = 6 \times 0{,}743\,1 = 4{,}46$$

donde $S = \frac{6}{2}(5{,}03 - 4{,}46) = 3 \times 0{,}57$

ou $S = 1{,}71 \text{dm}^2$

20. Área da coroa circular. Chama-se *coroa circular* a área compreendida entre duas circunferências concêntricas (fig. 49).

A área da coroa é a diferença entre as áreas dos dois círculos. Assim, sendo R o raio do círculo maior e r o do menor a área da coroa será:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2,$$

ou,

$$\boxed{S = \pi(R^2 - r^2)}$$

21. Área do trapézio circular. Trapézio circular é a parte da coroa compreendida entre dois raios.

Raciocínio análogo ao empregado para o setor, conduz à fórmula:

$$S = \frac{\pi(R^2 - r^2)n}{360}$$

para o cálculo da área de um trapézio correspondente a um ângulo central de n graus (fig. 50).

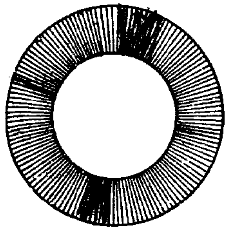


Fig. 49

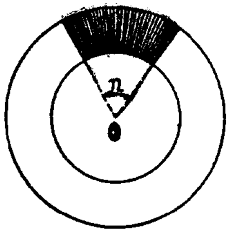


Fig. 50

II. Relações métricas entre áreas

22. Relação entre as áreas de polígonos semelhantes.

As áreas de dois polígonos semelhantes são proporcionais aos quadrados de duas linhas homólogas quaisquer.

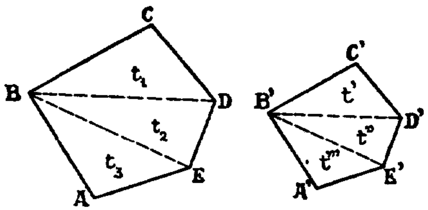


Fig. 51

Temos:

$$\text{Hip.: } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'}.$$

$$\text{Tese: } \frac{S}{S'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2} \dots$$

Demonstração:

a) Consideremos, em primeiro lugar, dois triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$.

Aplicando a fórmula da área do triângulo, vem:

$$S = \frac{bh}{2} \text{ e } S' = \frac{b'h'}{2}$$

Dividindo as duas igualdades, membro a membro, resulta:

$$\frac{S}{S'} = \frac{bh}{b'h'} \quad \text{ou} \quad \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'}.$$

As frações do segundo membro são iguais por hipótese; logo, temos:

$$\frac{S}{S'} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c}{c'^2} = \ldots$$

b) Consideremos dois polígonos semelhantes quaisquer. Em virtude da teoria da semelhança os dois polígonos podem ser decompostos em triângulos semelhantes e igualmente dispostos (fig. 51). Assim:

$$t_1 \sim t',\ t_2 \sim t'',\ t_3 \sim t''', \text{ etc.}$$

Logo, podemos concluir, de acôrdo com a primeira parte:

$$\frac{t_1}{t'} = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{C'B'}^2}; \quad \frac{t_2}{t''} = \frac{\overline{DE}^2}{\overline{D'E'}^2}; \quad \frac{t_3}{t'''} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{A'E'}^2} \ldots$$

Como os polígonos são semelhantes por hipótese, os segundos membros de tôdas as igualdades são iguais; logo, os primeiros também serão, isto é:

$$\frac{t_1}{t'} = \frac{t_2}{t''} = \frac{t_3}{t'''} = \ldots$$

Aplicando a propriedade das razões iguais e observando que a soma dos antecedentes é a área do primeiro polígono e a dos conseqüentes a do segundo, resulta:

$$\frac{S}{S'} = \frac{t_1}{t'} = \frac{t_2}{t''} = \ldots$$

donde, finalmente, substituindo a segunda razão por seu valor:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = \ldots$$

o que demonstra a tese.

23. Teorema de Pitágoras.

O quadrado construído sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo é eqüivalente à soma dos quadrados construídos sôbre os catetos.

Seja o triângulo retângulo ABC. Representemos, respectivamente, por Q, R e S as áreas dos quadrados construídos sôbre a hipotenusa e os catetos (fig. 52).

Temos a tese:

$$Q = R + S.$$

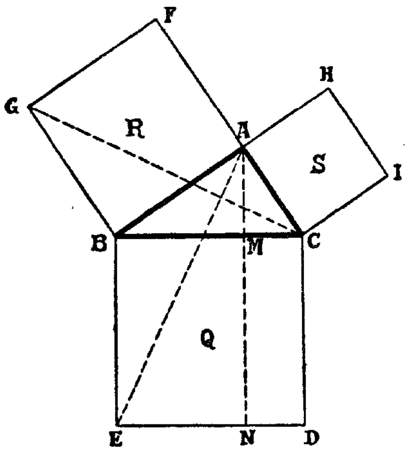


FIG. 52

Demonstração. Traçando a altura AM, sôbre a hipotenusa, e prolongando-a até N, podemos concluir:

$$Q = S_{BMNE} + S_{MCDN} \qquad (1)$$

Traçando AE e CG, temos:

$$\Delta GBC = \Delta ABE$$

pois $AB = BG$ (lados de quadrado)

$BE = BC$ (lados de quadrado)

e $\widehat{ABE} = \widehat{CBG}$ (1r mais B).

Da igualdade dos triângulos resulta a igualdade das áreas:

$$S_{ABE} = S_{BCG}.$$

ou, calculando as áreas:

$$\frac{BE \times BM}{2} = \frac{BG \times AB}{2}$$

donde: $$BE \times BM = BG \times AB$$

O primeiro membro é a área do retângulo $BMNE$ e o segundo é a área do quadrado $ABGF$, logo, temos:

$$S_{BMNE} = R \qquad (2)$$

Procedendo anàlogamente, concluiremos:

$$S_{MODN} = S \qquad (3)$$

Substituindo os valores (2) e (3) na igualdade (1), vem:

$$Q = R + S.$$

Generalização. Se, sôbre os lados de um triângulo retângulo, como linhas homólogas, constroem-se figuras semelhantes, a figura construída sôbre a hipotenusa é eqüivalente à soma das construídas sôbre os catetos (fig. 53).

Demonstração. Seja o triângulo retângulo ABC e F_1, F e F_2 figuras quaisquer semelhantes, cujos lados homólogos são a, b, c.

Sejam S_1, S e S_2 as áreas. Temos a tese:

$$S = S_1 + S_2.$$

De acôrdo com a primeira relação entre áreas, temos:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{c^2}{a^2} \qquad \frac{S_2}{S} = \frac{b^2}{a^2}$$

Somando, membro a membro, resulta:

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{b^2 + c^2}{a^2};$$

como a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, o segundo membro da última igualdade é igual a 1, portanto, temos:

$$\frac{S_1 + S_2}{S} = 1$$

donde: $$S = S_1 + S_2.$$

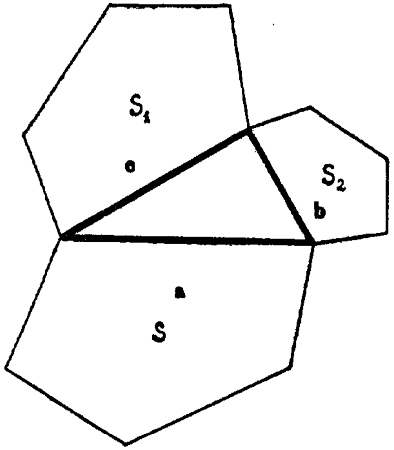


FIG. 53

APLICAÇÃO. *Construindo-se semicircunferências sôbre os lados de um triângulo retângulo, a soma das áreas das duas lúnulas é igual à área do triângulo* (fig. 54).

Demonstração. Se do semicírculo construído sôbre a hipotenusa subtrairmos as áreas dos segmentos S_1 e S_2 obteremos a área do triângulo ABC.

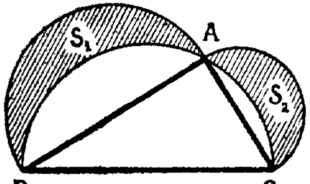


FIG. 54

Por outro lado, se subtrairmos dos semicírculos construídos sôbre os catetos as áreas dos mesmos segmentos S_1 e S_2, obteremos a soma S das áreas das lúnulas. Ora, de acôrdo com a conseqüência do teorema de Pitágoras, o semicírculo construído sôbre a hipotenusa tem a mesma área da soma dos construídos sôbre os catetos, logo, os resultados das subtrações são iguais, isto é, a soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo.

EXERCÍCIOS

1. Que comprimento deve ter o lado dum quadrado para que a área seja igual à dum retângulo, cujas dimensões têm respectivamente 24m e 12m? *Resp.:* 16,9m
2. Calcular a área do triângulo, cujos lados medem, respectivamente, 10m, 17m e 9m. *Resp.:* $36m^2$
3. Calcular a área de um quadrado, cuja diagonal mede 8m. *Resp.:* $32m^2$
4. Calcular a área de um losango, cujo lado tem 5m e a distância entre dois lados paralelos é de 4,8m. *Resp.:* $24m^2$
5. Um retângulo está inscrito num círculo de raio 5m. O perímetro do retângulo tem 28m. Determinar a área. *Resp.:* $48m^2$
6. Dois lados contíguos de um paralelogramo medem, respectivamente 3m e 6m, e formam um ângulo de 45°. Determinar a área. *Resp.:* $12,72m^2$
7. Calcular a área do decágono inscrito no círculo de raio 5m. *Resp.:* $73,37m^2$
8. A área de um triângulo retângulo é de $24m^2$ e a hipotenusa tem 10m. Determinar os catetos. *Resp.:* 6m e 8m
9. Calcular a área do hexágono regular, cujo apótema tem 1,732m. *Resp.:* $10,392\,0m^2$
10. Calcular a área do triângulo eqüilátero circunscrito a um círculo de raio 1m. *Resp.:* $5,196\,0m^2$
11. Determinar o comprimento de uma circunferência, sabendo-se que a área do hexágono regular inscrito vale $10,392\,0m^2$. *Resp.:* $12,566\,4m^2$
12. Calcular a área do triângulo eqüilátero inscrito no círculo de raio 5m. *Resp.:* $32,475\,0m^2$
13. Calcular a área do triângulo eqüilátero inscrito no círculo, cuja área é de $50,24m^2$. *Resp.:* $20,78m^2$
14. A área de um hexágono regular tem $10,392\,0m^2$. Calcular o raio do círculo circunscrito. *Resp.:* 2m
15. Calcular a área do octógono regular inscrito num círculo, sabendo-se que a área do triângulo eqüilátero inscrito no mesmo círculo é de $20,784\,0m^2$. *Resp.:* $45,41m^2$
16. Calcular a área dum círculo circunscrito a um triângulo eqüilátero, cuja área é $5,196\,0m^2$. *Resp.:* $12,566\,4m^2$

17. Calcular as bases dum trapézio cuja altura tem 12m, sabendo-se que o produto das bases, que é igual à área, vale $150m^2$. *Resp.:* 10m e 15m
18. Calcular a área do trapézio inscrito num semicírculo de raio 2m, cujas bases são, respectivamente, os lados do decágono e do hexágono inscritos no mesmo círculo. *Resp.:* $0,275\,0m^2$
19. Calcular a área de um trapézio isósceles, cujas bases têm, respectivamente, 14dm e 6dm e o lado 5dm. *Resp.:* $30dm^2$
20. Calcular a área de um hexágono regular inscrito em um círculo, sabendo-se que o raio do círculo é igual à diagonal maior de um losango, cujo lado mede 5m e cuja área vale $24m^2$. *Resp.:* $166,27m^2$
21. As bases de um trapézio têm 10m e 20m. Determinar o comprimento de uma paralela que divida o trapézio em duas partes eqüivalentes. *Resp.:* 15,81m
22. Calcular as dimensões e a área de um retângulo, sendo seus lados respectivamente iguais às diagonais de um losango, cuja área mede $24m^2$ e o lado 5m. *Resp.:* 8m, 6m, $48m^2$
23. Calcular a área de um segmento de um círculo de 5dm de raio e cujo arco mede 1,57dm. *Resp.:* $0,062\,5dm^2$
24. Calcular a área de um segmento de 22° 30′, sabendo que a área do hexágono regular inscrito no círculo é $6\sqrt{3}\,m^2$. *Resp.:* $0,02m^2$
25. As áreas de dois hexágonos semelhantes são representadas respectivamente pelos números $54\sqrt{3}$ e $150\sqrt{3}$. Determinar o lado do hexágono semelhante aos dados e cuja área seja a diferença entre as áreas dos mesmos. *Resp.:* 8
26. Calcular a área, em centímetros quadrados, de um triângulo retângulo, cujo perímetro tem 1 200cm e a altura sôbre a hipotenusa, 2,4m (E. M., 1938). *Resp.:* $60\,000cm^2$
27. As bases de um trapézio medem, respectivamente, 32 e 20m, e a altura, 6m. Traça-se uma paralela às bases que o divide em dois trapézios eqüivalentes. Calcular a distância da base menor à paralela traçada, bem como o segmento da paralela compreendido entre os lados não paralelos. *Resp.:* 3,34 e 26,68
28. Determinar a área de um triângulo retângulo isósceles, conhecendo-se o perímetro $2p$. Aplicação numérica $2p = 4m$. *Resp.:* $S = p^2(\sqrt{2}-1)^2$; $0,686\,42m^2$
29. Os lados de um triângulo são, números inteiros e consecutivos e sua área mede $84m^2$. Determinar os lados. *Resp.:* 13, 14 e 15 metros.
30. Num triângulo isósceles a altura principal (traçada sôbre o lado desigual) tem 4m e o raio do círculo inscrito 1m. Calcular a área. *Resp.:* $2,82m^2$

31. Num trapézio, cujas bases medem 20m e 32m e a altura 6m, dividem-se os lados não paralelos em três partes iguais por duas paralelas às bases. Calcular as áreas dos três trapézios parciais.
Resp.: 44m², 52m² e 60m²

32. Calcular a área do octógono regular inscrito no círculo de raio 4cm. *Resp.:* 45,12cm²

33. Deduzir a fórmula para o cálculo da área do decágono regular em função do apótema. *Resp.:* $2a^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}$

34. A área de um losango é de 7,50m² e a soma das diagonais vale 8m. Determinar o lado. *Resp.:* 2,9m

35. Calcular a área de um segmento de 60 graus de um círculo, cujo raio mede 2dm. *Resp.:* 0,36dm²

36. A altura de um triângulo é 2/3 da base e a área é 27m². Calcular a base e a altura. *Resp.:* 9m e 6m

37. Calcular a área de um triângulo cujos lados medem, respectivamente 6m, 8m e 10m. *Resp.:* 24m²

38. As bases de um trapézio medem, respectivamente, 6m e 9m. Calcular o comprimento do segmento paralelo às bases, que divide o trapézio em duas partes proporcionais a 2 e 3. *Resp.:* 7,32m

39. Calcular a área de um setor circular de 18° 20′, sabendo-se que a circunferência do círculo mede 25,12cm. *Resp.:* 2,55cm²

40. Calcular o raio do círculo inscrito num triângulo, cujos lados medem, respectivamente, 5m, 6m e 7m. *Resp.:* 1,633

41. As áreas de dois círculos, cujas circunferências são concêntricas, medem, respectivamente, 27m² e 35m². Calcular a área do trapézio circular por êles determinado e correspondente a um ângulo central de 40gr. *Resp.:* 0,8m²

42. Se aumentarmos o raio de um círculo de 3cm, a área aumentará de 65,94cm². Calcular o raio. *Resp.:* 2cm

43. A base de um triângulo isósceles tem 6dm e a altura, 8dm. Calcular a área do triângulo semelhante e menor, sendo 2/5 a razão de semelhança. *Resp.:* 3,84dm²

44. Dois retângulos são semelhantes na razão de 1/2. Os dois lados do retângulo maior medem 6cm e 10cm. Calcular a área do retângulo menor. *Resp.:* 15cm²

45. A razão entre as áreas de dois decágonos regulares é de 9/49. Se o perímetro do maior é de 63cm, qual o lado do menor? *Resp.:* 2,7cm

46. As áreas de dois triângulos semelhantes medem, respectivamente, 25m² e 4m². Uma das alturas do triângulo maior mede 5m, calcular a altura homóloga do triângulo menor. *Resp.:* 2m.

47. As alturas homólogas de dois triângulos semelhantes medem, respectivamente, 8dm e 10dm. A área do primeiro tem 80dm². Calcular a área do segundo. *Resp.:* 125dm²

48. O lado de um dodecágono regular tem 4dm e o perímetro de outro dodecágono regular tem 96dm. Achar a razão entre as áreas dos dois dodecágonos. *Resp.:* 1/4

49. Calcular a área de um segmento circular de 28°, num círculo de 5dm de raio. *Resp.:* 0,24dm²

50. Calcular a área de um segmento circular de 40gr, num círculo de 10m de raio. *Resp.:* 2,02m²

APÊNDICE

Revisão geral: *primeira série de exercícios*

I — Prova de admissão à primeira série dos Cursos Normais do Estado da Guanabara, 3/2/1961.

PRIMEIRA PARTE (Cada questão de lacuna vale 10 pontos).

Complete:

1. Quando dois radicais têm o mesmo índice e o mesmo radicando são chamados.........
2. A equação que tem incógnita submetida a expoente fracionário é chamada.........
3. As bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares são.........
4. Num círculo estão inscritos um hexágono regular e um triângulo equilátero. A razão entre os apótemas do hexágono e do triângulo é expressa pelo número.........
5. O valor numérico de $x^2y^3 - 2x\,y^2$, para $x = -2$ e $y = 3$, é.........
6. A equação do 2.º grau cujas raízes são $3 + \sqrt{5}$ e $3 - \sqrt{5}$ é.........
7. Simplificando-se o radical $\sqrt[4]{a^2 - 2ab + b^2}$, obtém-se.........
8. A menor das raízes da equação $5x^2 + x = 0$ é.........
9. Sendo 0,25 o produto das raízes da equação $4x^2 - 5x + p = 0$, o valor de p é.........
10. Dado o sistema

$$\begin{aligned} 3x + y &= 4 \\ 12x + 2y &= 15 + mx \end{aligned}$$

O valor de m que torna êsse sistema impossível é.........

11. De cada vértice de um icoságono partem.........diagonais.
12. Se os ângulos agudos de um triângulo retângulo medem 30° e 60°, e se o menor cateto tem 6 dm, a hipotenusa tem.........dm
13. Num círculo estão inscritos um quadrado e um hexágono regular. Se o perímetro do quadrado é $4\sqrt{2}$ dm, o do hexágono é.........dm
14. Num círculo cuja circunferência mede 6π cm, a corda de 120° tem por medida.........cm

SEGUNDA PARTE

Primeiro Problema (Valor : até 20 pontos):

A soma de dois números é 15, e a dos seus inversos $\frac{5}{18}$. Calcule êsses números.

Segundo Problema (Valor: Até 20 pontos):

Num círculo de 2m de raio está inscrito um trapézio cuja base maior é um diâmetro. Os lados não paralelos dêsse trapézio são lados do hexágono regular inscrito nêsse mesmo círculo. Calcule, em metros quadrados, a área dêsse trapézio.

TERCEIRA PARTE

Questão Teórica (Valor: Até 20 pontos):

Deduza a fórmula que permite calcular o lado de um dodecágono regular inscrito num círculo de raio R, quando é conhecido R.

Respostas:

1. Semelhantes 2. Irracional 3. Perpendiculares
4. $\sqrt{3}$ 5. 144 6. $x^2 - 6x + 4 = 0$
7. $\sqrt{a-b}$ 8. $-1/5$ 9. 1
10. 6 11. 17 12. 12 13. 6 14. 4 15. 9 e 6
16. $3\sqrt{3}\,m^2$ 17. Veja pág. 151.

II — Questões de Álgebra

1. Questões objetivas:

1. Para que valores de x a expressão $-(x^2 - 3x + 2)^2$ admite valor real? *Resp.*: A expressão é sempre imaginária. (*Obs.*: no ponto de vista do programa do ginásio, não existe) (C.N. – 59)
2. Classificar a expressão $\dfrac{x+3}{x^3 - 5x^2 + 2x + 4}$.

   Resp.: algébrica, racional, fracionária. (C.N. – 59)
3. Que relação deve existir entre a e b a fim de que a equação $3x + 2a - \dfrac{2x+b}{3} = a + 20$, admita a raiz 2? *Resp.*: $3a - b = 46$ (C.N. 59)

4. Escreva, sem resolver, uma raiz da equação $(2x-1)^2 + (3x+2) = (2a-1)^2 + (3a+2)$ *Resp.*: $x = a$. (C.N. 59)
5. Uma das raízes da equação $x^4 - bx^2 + 36 = 0$, é 3. Calcular as outras, sendo b constante.

   Resp.: $-3{,}2$ e -2. (C.N. – 59)
6. Dê o sinal, justificando a resposta, da expressão $P(x) = x^2 - 6x + R$ para $x = 3$, supondo que $x^2 - 6x + R = 0$, tenha 2 raízes distintas

   Resp.: negativa. (C.N. – 59)
7. O valor de a para que a equação $(a-1)\,x = b$, seja impossível é______

   Resp.: $a = 1$ (C.N. – 58).
8. Dê uma solução do sistema indeterminado:

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 3x + 6y &= -3 \end{aligned}$$

9. Determine os sinais de x_1 e x_2 ($|x_1| < |x_2|$), raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, onde $b > 0$ e $c < 0$

   Resp.: $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$.
10. Dê exemplo de um n.º irracional algébrico. (C. N. – 58).
11. Dê exemplo de uma eq. fracionária em x. (C. N. – 58).
12. Duas das raízes de uma equação biquadrada são -2 e 3. As outras duas serão_________ (C. N. – 58).
13. O maior valor inteiro de x que verifica a desigualdade $\dfrac{2x-1}{3} < 1$ é_________ (C. Ar. – 58). *Resp.*: 3.

2. Cálculo Algébrico:

14. Simplificar $$\frac{1}{x - \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}} - \frac{1}{x + \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}}$$

    Resp.: $\dfrac{2}{x^3}$ (C. N. – 59).
15. Achar o m.d.c. entre $x^3 + 2x^2 - 3x$ e $2x^3 + 5x^2 - 3x$

    Resp.: $x^2 + 3x$ (C. N. – 59).
16. Simplificar $$\frac{1 + \dfrac{a-b}{a+b}}{1 - \dfrac{a-b}{a+b}} : \frac{1 + \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1 - \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

    Resp.: $\dfrac{b}{a}$ (C. N. – 59).

17. Qual a maior das frações: $\dfrac{a+b}{2}$ e $\dfrac{2ab}{a+b}$, sendo a e b positivos?

Resp.: a primeira.

18. Efetuar $\dfrac{a}{(a-b)\ (a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)\ (b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)\ (c-b)}$;

Resp.: 0 (C. N. – 59).

19. Simplificar $\dfrac{(a^2-b^2-c^2-2bc)\ (a+b-c)}{(a+b+c)\ (a^2+c^2-2ac-b^2)}$

Resp.: 1 (C. N. – 59).

20. Simplifique a fração: $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$

Resp.: $x = 2$ (C. N. – 58).

21. Decomponha em fatôres do 1.° grau: $y = x^3 + x^2 - x - 1$.

Resp.: $(x+1)^2\,(x-1)$. (C. N. – 58).

22. Complete a expressão: $25a^2 - \ldots\ldots + 36b^2$, de modo a obter um quadrado perfeito (C. Ex. – 59) *Resp.*: 60 ab.

23. Efetue: $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2} : \dfrac{x^2+xy}{x-y}$ (C. Ex. – 59) *Resp.*: $\dfrac{x^2+y^2}{x}$.

3. Radicais:

24. Dividir $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ por $\dfrac{7+4\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}}$, racionalizando o quociente.

Resp.: $2-\sqrt{3}$ (C. N. – 59).

25. Simplificar $\dfrac{(2+\sqrt{3})\ (3-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})\ (3+\sqrt{3})}$ *Resp.*: $2+\sqrt{3}$ (C. N. – 59).

26. Racionalize: $\dfrac{2}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}}$ (C. N. – 59).

Resp.: $\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}$.

27. Efetuar $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (C. Ar. – 59.)

28. Verifique a identidade: $\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}} - \dfrac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} = 4a\sqrt{a^2-1}$

(C. N. – 58).

4. Equações e sistemas do primeiro grau:

29. Resolver a equação $\dfrac{4}{x+3} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{5}{2x+6} + \dfrac{2{,}5}{2x+2}$

Resp.: 1 (C.N. – 58).

Resolva $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = 0$ *Resp.*: impossível. (C.N. – 58).

30. Determinar m de modo que sejam compatíveis as equações: $mx + y = 1$, $x+y = 2$, $x-y = m$. *Resp.*: 0 ou –1 (C. N. – 58).

31. Ache a de modo que seja determinado o sistema $ax + y = 1$, $x+ay = 2$.

Resp.: $a \neq \pm 1$ (C. N. – 58).

32. Determinar k no sistema $\begin{cases} kx - 6y = k-1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ de modo que x e y sejam iguais. *Resp.*: $k = 61/6$ (C. N. – 59).

33. Resolver o sistema $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 1$, $6x - 5y = \dfrac{13}{9}xy$ (C. Ar. – 57) *Resp.*: 9 e 3.

34. Achar a e b para que o sistema $\begin{matrix} ax - 12y = 15 \\ 12x - 16y = b \end{matrix}$ seja indeterminado (C. Ex. – 59) *Resp.*: 9 e 20.

35. Resolver o sistema $\dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{6}{5}$ e $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6}$ (C. N. – 59).

Resp.: 3 e 2.

36. Resolver o sistema $\dfrac{1}{x-3y} + \dfrac{1}{3x-y} = \dfrac{9}{14}$

$\dfrac{2}{x-3y} - \dfrac{3}{3x-y} = \dfrac{11}{14}$ *Resp.*: 5 e 1 (C.N. – 59).

37. Decomponha em fatôres do primeiro grau: $y = x^3 + x^2 - x - 1$

Resp.: $y = (x+1)^2\,(x-1)$ (C.N. – 58).

38. Resolva a inequação em x : $\dfrac{a}{2}(x-a) < -(x+2)$ sendo $a < -2$

Resp.: $x < -4$ (C.N. – 58).

5. Equações e trinômio do 2.° grau:

39. Para que valores de x a fração $\dfrac{(3x+5)\ (-x^2+9)}{x^2+x+1}$ é positiva?

Resp.: $x < -3$ ou $-5/3 < x < 3$ (C.N. – 59).

40. Dada a equação $x^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2, calcular $\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_2}\right)^2$ por meio de b e c.
Resp.: $\frac{b^2 - 2c}{c^2}$ (C. N. - 59).

41. Que valores devem ser atribuídos a p para que a expressão x^2+2x+p seja maior que 10 para qualquer valor de x? *Resp.*: $p \geqslant 11$ (C.N. - 59).

42. Determinar os valores de k para que o trinômio $(k+1)x^2-2(k-1)x+3k-3$ seja negativo. *Resp.*: $k < -1$ (C. N. - 58).

43. Determinar o valor de m para que a equação
$$(m+4)x^2 + (m-3)x + (3m-6) = 0,$$
tenha uma e apenas uma raíz nula.
Resp.: $m = 2$ (C.N. - 59).

44. Qual o valor de x para o qual o trinômio $y = x^2 - 2x + 5$ tenha máximo ou mínimo? *Resp.*: $x = 1$ (N. C. - 59).

45. Dar os valores de x que satisfazem simultâneamente as inequações:
$$x^2 - 5x + 6 > 0$$
$$x^2 - 9x + 14 < 0$$
Resp.: $3 < x < 7$. (C.N. - 59).

46. Dada a equação $x^2-6x+25 = 0$, determinar a equação do 2.º grau, cujas raízes são as médias aritméticas e geométrica das raízes da equação dada.
Resp.: $y^2-8y+15 = 0$ e $y^2+2y-15 = 0$ (C. N. - 59).

47. Resolva a inequação: $\frac{2x+1}{2} > 1 - \frac{1-x^2}{x}$ (C.N. - 58).

48. Uma bicicleta de Cr\$ 2 800,00 devia ser comprada por um grupo de rapazes que contribuiriam em partes iguais. Como 3 dêles desistissem, a quota de cada um dos outros ficou aumentada de Cr\$ 120,00. Quantos eram os rapazes? *Resp.*: 10. (C. N. - 58).

49. Os números a e b são raízes da equação em x:
$$10x^2 + 3x + 10ab = 0$$
calcule a e b sabendo-se que o quíntuplo do inverso de a é igual ao simétrico do dôbro do inverso de b. *Resp.*: $-0{,}5$ e $-0{,}2$ (C. N. - 58).

50. Para que valores de p a equação $x^2 - px + 1 = 0$ admite raízes reais e desiguais? *Resp.*: $p > 2$ (C.N. - 58).

51. Resolver a inequação $2A - 4B - 3C < 0$, sendo:
$$A = x^2 - 5x - 3,\ B = -x+2,\ C = \frac{x^2}{3} - \frac{10}{3}$$
(C. Ar. - 59) *Resp.*: $2 < x < 4$.

52. Resolver o sistema: $x^2 - y^2 = 11$, $x - y = 1$ *Resp.*: $x = 6, y = 5$ (C. Ar.-58).

53. Resolveu-se a equação $ax^2+bx+c = 0$ e encontrou-se o valor $x_1 = -\frac{b}{2a}$ para uma das raízes.
Que se conclui? (C. Ar. - 58). *Resp.*: $x_2 = -\frac{b}{2a}$.

54. Resolver: $\frac{x^2+3}{3} - \frac{3x-1}{4} > 2$ (C. Ar. - 57). *Resp.*: $x>3$ e $x< -\frac{3}{4}$

55. Determinar K na equação $x^2+Kx + 36 = 0$, de modo que entre as raízes se verifique a relação $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$. (C. Ar. - 57).
Resp.: $K = -15$.

56. Determine K na equação $(3K+1)x^2 + (2K+2)x + K = 0$, para que as raízes sejam iguais (C. Ex. - 58). *Resp.*: 1 e $-\frac{1}{2}$.

57. Formar a equação do 2.º grau, de coeficientes racionais, que admite a raíz $2 + \sqrt{3}$. (C. Ex. - 56). *Resp.*: $x^2 - 4+x1 = 0$.

III — Geometria

1. Polígonos - Triângulos - Quadriláteros:

58. Exprimir em radianos o valor do ângulo interno de um octógono regular. (C. Ex. - 59). *Resp.*: $3\pi/4$.

59. Em um trapézio isósceles os lados não paralelos medem 10m cada um e um dos ângulos internos 60°. Calcule a distância entre os pontos médios das diagonais. (C. N. - 58). *Resp.*: 5m

60. Achar o valor do ângulo que forma a mediana com a altura que partem do vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo no qual a razão dos ângulos agudos é 3/4. (C. Ar. - 59). *Resp.*: 22° 30′

61. Em que polígono regular o ângulo externo vale 2/3 do ângulo interno? (C. Ar. - 59). *Resp.*: pentágono.

62. Num círculo está inscrito um triângulo equilátero de área igual a $12\sqrt{3}$ m². Calcular o lado do octógono regular inscrito no mesmo círculo. (C. Ar. - 57). *Resp.*: 4,6m.

2. Semelhança - Relações Métricas:

63. *ABCD* é um quadrilátero, cujos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são retos e no qual $AB = 6$m, $BC = 8$m, $CD = 5$m. Calcular o lado AD (C. Ex. - 53).
Resp.: 8,6m

64. Calcular o lado do quadrado inscrito num triângulo equilátero de 2m de lado, estando um dos lados do quadrado sôbre a base do triângulo. (C. Ex. – 58). *Resp.*: 0,93m.

65. Dado o triângulo *ABC*, cujos lados são $AB = 15$cm, $BC = 14$cm e $AC = 13$cm, calcular a distância do vértice C ao pé da altura relativa ao lado *BC*. (C. N. – 59). *Resp.*: 5cm.

66. As duas alturas de um paralelogramo medem 2m e 3m. Achar os lados do paralelogramo, sabendo-se que o semiperímetro é de 20m. (C. N. – 59). *Resp.*: 8m e 12m.

67. Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 40m e a altura relativa à mesma mede 19,2m. Calcular os catetos. (C. N.– 59). *Resp.*: 32m e 24m

68. As bases de um trapézio medem 8m e 12m e os lados 3m e 5m. Calcular os dois lados do triângulo que se obtém prolongando os lados do trapézio. (C. N. – 59) *Resp.*: 6m e 10m.

69. Um quadrilátero inscrito tem os lados respectivamente iguais a 3m, 4m, 8m e 6m. Sabendo-se que uma das diagonais mede 8m, calcular a outra. (C. N. – 59). *Resp.*: 6m.

70. Um hexágono regular tem $120\sqrt{3}$ m² de área. Calcule o apótema do polígono semelhante, sabendo-se que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é de 1/2. (C.N. – 58). *Resp.*: 15,2m.

3. Áreas:

71. Num triângulo *ABC* temos: $\hat{A} = 120°$, $b = 4$cm e $c = 5$cm. Calcular o lado a e a área. (C. Ex. – 59). *Resp.*: 7,8cm e 8,66cm².

72. Em um semicírculo de 4cm de raio está inscrito um trapézio, cujas bases são iguais aos lados do hexágono e do triângulo regulares inscritos. Calcular a área. (C. Ex. – 59). *Resp.*: 8cm².

73. Num trapézio escaleno de 54m² de área, a altura mede 6m. Calcular as bases, sabendo que a distância entre os meios das diagonais é de 4m (C. Ex. – 58). *Resp.*: 13 e 5.

74. As bases de um trapézio escaleno medem 6m e 8m e a altura, 5m. Prolongando os lados não paralelos, forma-se um pequeno triângulo que tem por base e a base menor do trapézio. Calcular a área do triângulo. (C. Ex. – 58). *Resp.*: 45m².

75. Em um trapézio *ABCD*, $AB = 10$m, $BC = 7$m, $CD = 5$m e $DA = 6$m. Calcule a área dêsse trapézio, sabendo-se que a base maior é *AB*. (C. N. – 58). *Resp.*: 43,50m².

76. Constroem-se sôbre os lados de um triângulo equilátero *ABC* de lado igual a 10m, três quadrados. Ligam-se os vértices do quadrado por segmentos retilíneos. Calcular a área total da figura obtida. (C.N.–59). *Resp.*: 470m².

77. Dado o triângulo *ABC* toma-se sôbre o lado $AB = 21$m um ponto D tal que a área do triângulo *DBC* seja o dôbro da do triângulo *ADC*. Qual o comprimento do segmento *AD*? (C. N. – 59). *Resp.*: 7m

78. Um triângulo retângulo está inscrito num círculo, de diâmetro 37cm e circunscrito a um círculo de 5cm de raio. Calcular a área do triângulo. (C. N. – 59). *Resp.*: 210m².

79. Calcular a área do quadrilátero formado pelas bissetrizes dos ângulos internos do retângulo, cujas dimensões são 10m e 6m. (C. N. – 59). *Resp.*: 8m².

REVISÃO

Segunda série de exercícios. Exames de 1961

I — Colégio Naval

1. Qual deve ser o raio de um círculo se quisermos que o lado do quadrado inscrito tenha 25dm a menos que o lado do triângulo equilátero inscrito no mesmo círculo?

2. Um losango, do qual um dos ângulos vale 60°, está circunscrito a um círculo de 9m de raio. Calcular a área da superfície compreendida entre o losango e o círculo.

3. O ponto de contato com a hipotenusa, de um círculo inscrito num triângulo retângulo, determina sôbre a mesma, segmentos de 5cm e 4cm. Qual a área do triângulo?

4. Dois círculos, do mesmo raio 5cm, são tais que, cada um dêles passa pelo centro do outro. Êsses círculos cortam-se em M e N e interceptam a linha dos centros em P e Q. Calcular o perímetro do quadrilátero *MNPQ*.

5. *ABCD* é um trapézio isósceles com 30m² de área e cujas bases *AB* e *CD* são iguais aos lados do triângulo equilátero e do hexágono regular inscritos no mesmo círculo de raio 6m. Calcular a área do menor triângulo que se obtém prolongando os lados não paralelos dêsse trapézio até se encontrarem.

6. Efetuar e simplificar

$$\left[\frac{2x}{x+y} - \frac{y}{y-x} + \frac{y^2}{y^2-x^2}\right] : \left[\frac{1}{x+y} + \frac{x}{x^2-y^2}\right]$$

7. Dar todos os valores de x para os quais é positivo o produto $(x^2 - 2x - 8)(-x^2 + x)$.

8. Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4} \\[2mm] \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{5}{16} \end{cases}$$

9. Um número inteiro de 6 algarismos começa, à esquerda pelo algarismo 1. O nôvo número de 6 algarismos, que se obtém transpondo o algarismo 1 para a direita é o triplo do primitivo. Calcular o número primitivo.

10. Decompor em fatôres do primeiro grau

$$x^3\,yz + y^3\,xz - z^3\,xy + 2x^2y^2z$$

11. Dividir

$$x^3 - x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 \text{ por } x^2 - 1$$

12. Transformar os radicais duplos da expressão

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$$ e simplificar a resposta.

13. Resolver a equação

$$\frac{x-1}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5}\right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

14. *a*) A equação $3 + \sqrt{x} = 8$ é uma equação ....
b) O sistema $\begin{matrix} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{matrix}$ é determinado quando ....
c) O binômio $y = -3x + 21$ é positivo para ....
d) Efetuando o produto $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ e reduzindo os têrmos semelhantes em relação a x, quantos têrmos conterá o produto?

II — E. P. C. do Ar

15. Subtraindo ..... da expressão $\frac{a^2}{169} + \frac{b^2}{49}$ obtém-se o quadrado de ....

16. Achar três múltiplos consecutivos do número a, cuja soma seja k.

17. Se $(x^2 + x + 1)^2 - (2x^3 + x^2 + 2x) = m^2$, calcular m.

18. Sabendo que $\sqrt{y} = -a - b$, determinar y.

19. Considerando apenas os valores positivos das raízes encontradas, achar o valor da expressão

$$y^{1/4}\,(y^{3/4} + y^{1/2} + y^{1/4}) + \left(\frac{1}{y^2}\right)^{-1} \quad \text{para } y = 2^4$$

20. Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{A} = \dfrac{y}{B} = \dfrac{z}{C} \\ xyz = k \end{cases}$$

21. Decompor em fatôres do primeiro grau o trinômio $9x^4 - 82x^2 + 9$

Respostas:

1. $25(\sqrt{3}+\sqrt{2})$; 2. $216\sqrt{3} - 81\pi$; 3. 20cm^3; 4. $20\sqrt{3}$ cm; 5. 15m^2; 6. x
7. $-2 < x < 0$; 8. $x = 2$ e $y = 4$ ou $x = 4$ e $y = 2$; 9. 142857; 10. $xyz(x+y+z)(x+y-z)$;
11. x^2-2x+1; 12. 2; 13. $x = 17$; 14. *a*) irracional, *b*) $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$;
c) $x < 7$; *d*) 5 têrmos.

15. $\frac{2ab}{91}$, $\left(\frac{a}{13} + \frac{b}{9}\right)^2$ 16. $\frac{k-3a}{3}$, $\frac{k}{3}$ e $\frac{k+3a}{3}$; 17. $\pm(x^2 + 1)$;

18. $a^2+2ab+b^2$; 19. 284; 20. $x = \sqrt[3]{\frac{A^2K}{BC}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{B^2K}{AC}}$, $z = \sqrt[3]{\frac{C^2K}{AB}}$;

21. $(x+3)(x-3)(3x+1)(3x-1)$.

Obra executada nas oficinas da
SÃO PAULO EDITORA S. A.
São Paulo 6, SP — Brasil